Segnali per le comunicazioni –Appello del 26/1/2023

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI ideale con risposta in frequenza $H(f) = j6\pi f \cdot rect\left(\frac{f}{2}\right)$.

All'ingresso del sistema dato si pone il segnale: $x(t) = \frac{\sin 3\pi t}{3\pi t}$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza data $H(f)$.

b - Si calcoli l'espressione dell'uscita $y(t)$ del sistema dato.

ESERCIZIO 2

Il segnale $x(t) = \cos(8\pi t)$ viene campionato con intervallo di campionamento *T* uguale a $\frac{10}{3}$ il massimo intervallo di campionamento necessario ad evitare alias in frequenza.

La sequenza x_n così ottenuta, viene convoluta con la risposta all'impulso $h_n = \delta_{n+1} + \delta_n + \delta_{n-1}$.

a - Si trovi il valore dell'intervallo di campionamento *T*.

b – Si calcoli la trasformata di Fourier della sequenza x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

c – Si trovi l'espressione della sequenza $y_n = x_n * h_n$ (*suggerimento: in questo caso il calcolo è ugualmente veloce se eseguito direttamente nel tempo o in frequenza*).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario con potenza *P=19*, densità di probabilità delle ampiezze gaussiana, valor medio $m_x < 0$ e autocovarianza $C_x(\tau) = \begin{cases} 3 - |3\tau| & se \quad |\tau| < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$

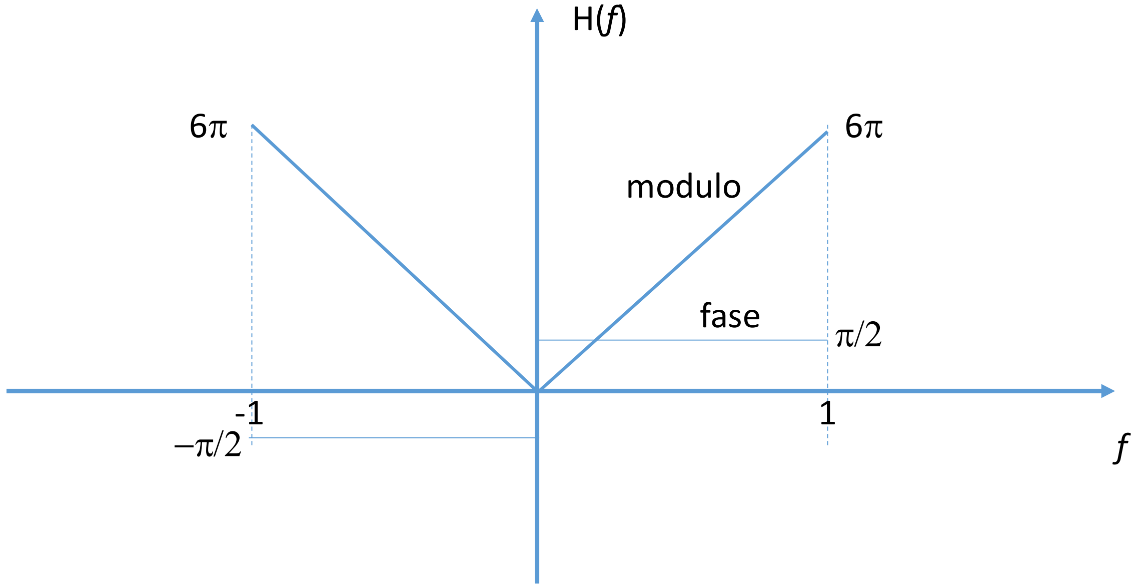
a – Il processo casuale viene filtrato con un filtro la cui risposta all'impulso è un rettangolo di ampiezza unitaria e durata 3 secondi. Quanto vale il valor medio del processo filtrato?

b –Dopo quanto tempo le ampiezze del processo filtrato diventano tra loro indipendenti?

c – Quanto vale la varianza del processo filtrato? [*suggerimento: non è necessario calcolare l'espressione completa dell'autocorrelazione del processo filtrato, ma utilizzando la formula nei tempi calcolarne il valore in zero …*]

Soluzione Esercizio 1 del 26/1/2023

A) La risposta in frequenza $H(f)$ è puramente immaginaria ed è limitata dal rettangolo tra -1 e +1 Hz. Il modulo aumenta linearmente con la frequenza tra 0 e 6π, la fase vale +π/2 tra 0 e 1Hz e −π/2 tra 0 e -1Hz. Si veda il grafico della seguente figura.



B) La trasformata *X(f)* del segnale *x(t)* è un rettangolo di altezza 1/3, centrato nell'origine, di banda bilatera 4 e quindi non completamente contenuto nel rettangolo di banda bilatera 3 della risposta in frequenza data. La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = \frac{1}{3} j6\pi f \ \cdot rect\left(\frac{f}{2}\right) = j2\pi f \ \cdot rect\left(\frac{f}{2}\right)$$

Dalla nota proprietà della trasformata di Fourier, il segnale d'uscita *y(t)* è la derivata prima di

$$x(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{-\pi\sin(2\pi t) + 2\pi^2 t \cdot \cos(2\pi t)}{(\pi t)^2} = \frac{-\sin(2\pi t) + 2\pi t \cdot \cos(2\pi t)}{\pi t^2}$$

Soluzione Esercizio 2 del 26/1/2023

A) La frequenza massima del segnale è 4 quindi la minima frequenza di campionamento è 8 e il massimo intervallo di campionamento per evitare alias è $T_{max} = \frac{1}{8}$.
L'intervallo di campionamento vale dunque $T = \frac{10}{3} T_{max} = \frac{5}{12}$
e la frequenza di campionamento $f_s = \frac{12}{5}$

B) La sequenza ottenuta dal campionamento del segnale dato ha la seguente espressione:

$$x(nT) = x_n = \cos\left(8\pi \frac{5n}{12}\right) = \cos\left(2\pi \frac{5}{3} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{1}{3} n\right)$$

La cui trasformata di Fourier in frequenza normalizzata è data da due impulsi alle frequenze normalizzate $\pm\frac{1}{3}$

$\tilde{X}(\varphi) = \frac{1}{2}\delta\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\varphi + \frac{1}{3}\right)$ periodica di periodo 1

Quella in frequenza:

$\tilde{X}(f) = \frac{6}{5}\delta\left(f - \frac{4}{5}\right) + \frac{6}{5}\delta\left(f + \frac{4}{5}\right)$ periodica di periodo $\frac{12}{5}$

Il risultato si ottiene direttamente dalla definizione di trasformata di una sequenza, oppure dal teorema del campionamento nel modo seguente:

La trasformata di $x(t) = \cos(8\pi t)$ è $X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-4) + \frac{1}{2}\delta(f+4)$

Campionando con frequenza $f_s = \frac{12}{5}$ si ottiene

$\tilde{X}(f) = \frac{6}{5}\delta\left(f - \frac{4}{5}\right) + \frac{6}{5}\delta\left(f + \frac{4}{5}\right)$ nell'intervallo di frequenze $-\frac{6}{5} < f \leq \frac{6}{5}$ periodica di periodo $\frac{12}{5}$

Da qui si ricava la trasformata di Fourier in frequenza normalizzata:

$\tilde{X}(\varphi) = \frac{1}{2}\delta\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\varphi + \frac{1}{3}\right)$ nell'intervallo di frequenze $-\frac{1}{2} < f \leq \frac{1}{2}$ periodica di periodo 1

C) La sequenza $x_n = \cos\left(2\pi \frac{1}{3} n\right)$ è perioca di 3 campioni nel tempo e i campioni di un periodo valgono 1, -1/2, -1/2 … quindi abbiamo una sequenza periodica … 1, -1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2 …. convoluta con la sequenza 1, 1, 1.
Otteniamo una sequenza nulla perché la somma di qualsiasi terna di campioni consecutivi di x_n è nulla.

Volendo passare al dominio delle frequenze, si calcola $H(\varphi) = 1 + 2\cos(2\pi\varphi)$ che è nulla in corrispondenza delle frequenze normalizzate $\pm\frac{1}{3}$.

Soluzione Esercizio 3 del 26/1/2023

A) La varianza del processo dato è uguale all'autocovarianza in zero, quindi $\sigma_x^2 = 3$ e $m_x = -4$.

Il valor medio del processo filtrato si ottiene moltiplicando il valor medio dell'ingresso per l'integrale della risposta all'impulso che nel nostro caso vale 3. Dunque $m_y = -12$

B) L'autocovarianza del segnale filtrato ha valori diversi da zero nell'intervallo $|\tau| > (1+3)$ (la durata della convoluzione è uguale alla somma della durata dei due segnali). Dunque dopo 4 secondi le ampiezze del processo filtrato diventano tra loro indipendenti.

C) Il valore dell'autocovarianza in 0 e' dato dall'integrale del prodotto di $C_x(\tau)$ con $h(\tau) * h(-\tau)$ che vale

$$C_y(0) = 2\int_0^1 (3-3\tau)(3-\tau)d\tau = 2\int_0^1 (9+3\tau^2-12\tau)d\tau = 2 \cdot (9+1-6) = 8$$