Segnali per le comunicazioni –Appello del 16/01/2024

Tempo richiesto 1h e 45min.

ESERCIZIO 1

Sia data la trasformata di Fourier $X(f) = rect\left(\frac{2f}{f_s}\right) - \frac{j}{2}\delta\left(f - \frac{3}{4}f_s\right) + \frac{j}{2}\delta\left(f + \frac{3}{4}f_s\right)$ del segnale tempo continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento f_s.

A - Si traccino i grafici di modulo e fase della trasformata $X(f)$ data.

B - Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo $x_R(t)$ ricostruito dai campioni x_n.

C - Si calcoli l'espressione del segnale $y(t)$ ottenuto filtrando il segnale $x_R(t)$ con un filtro passa-basso ideale di banda bilatera $\frac{f_s}{10}$.

ESERCIZIO 2

Siano date due sequenze di durata finita di 100 campioni:

$x_n = \sin\left(2\pi\frac{n}{50}\right)$ e $y_n = \cos\left(2\pi\frac{n}{100} + \frac{\pi}{12}\right)$ con $0 \leq n \leq 99$

Si trovi l'espressione della convoluzione **circolare** tra x_n e y_n

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario $y_n = x_n + w_n$ dove x_n ha densità di probabilità delle ampiezze uniforme tra –A e +2A e w_n, indipendente da x_n, ha densità di probabilità delle ampiezze gaussiana con valor medio m_w e varianza σ_w^2 .

A - Si trovi l'espressione della potenza di y_n .

Il processo casuale x_n viene fatto passare attraverso un dispositivo **NON** lineare in cui l'uscita z_n viene azzerata per $x_n < 0$, è uguale a x_n per i valori di $x_n > A$ ed è uguale a 0.5 per $0 \leq x_n \leq A$.

B - Si trovi l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze di z_n

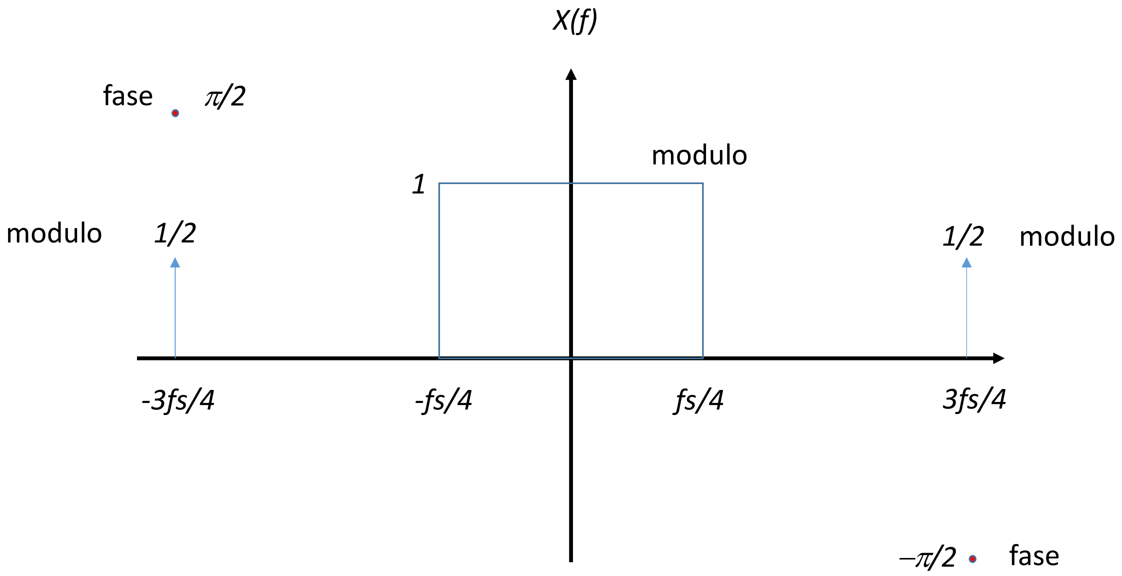
C – Si trovi valor medio e varianza del processo casuale z_n

Segnali per le comunicazioni –Appello del 16/01/2024

Soluzioni

Risposta 1

A -



B - $x_R(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{f_s}{2} t\right)}{\pi t} - \sin\left(\pi \frac{f_s}{2} t\right)$

C – Il seno cade fuori dalla banda del filtro e quindi viene eliminato. La trasformata del seno cardinale è un rettangolo di banda $\frac{f_s}{2}$ e altezza unitaria. Il filtro lascia passare un rettangolo di banda $\frac{f_s}{10}$ e altezza unitaria. Dunque il segnale filtrato avrà la seguente espressione:

$$y(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{f_s}{10} t\right)}{\pi t}$$

Risposta 2

$$z_n = x_n * y_n = 0$$

Infatti X_k è costituita da 2 impulsi in $k = 2$ e $k = 98$, Y_k è costituita da 2 impulsi in $k = 1$ e $k = 99$ e la TDF della convoluzione circolare è uguale a prodotto delle DFT.

Risposta 3

A) Dall'espressione della ddp delle ampiezze di x_n si ottiene:

$\sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{9A^2}{12} = \frac{3A^2}{4}$ e $m_x = \frac{2A-A}{2} = \frac{A}{2}$

$$P_y = E[x_n^2] + E[w_n^2] + 2E[x_n w_n]$$

Con: $E[x_n^2] = \frac{3A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = A^2$ $\quad E[w_n^2] = \sigma_w^2 + m_w^2$ $\quad 2E[x_n w_n] = 2E[x_n]E[w_n] = A\, m_w$

Dunque: $P_y = A^2 + \sigma_w^2 + m_w^2 + A\, m_w$

B)

$$p_z(a) = \frac{1}{3}\delta(a) + \frac{1}{3A} rect\left(\frac{a}{A} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}\delta\left(a - \frac{1}{2}\right)$$

C) Valor medio e varianza si calcolano dalla definizione

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} a p_z(a) da = 0 + \frac{A}{2} + \frac{1}{6}$$

$$E[z_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 p_z(a) da = 0 + \frac{7A^2}{9} + \frac{1}{12}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{7A^2}{9} + \frac{1}{12} - \left(\frac{A}{2} + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{19A^2}{36} - \frac{A}{6} + \frac{1}{18}$$