SEGNALI PER LE COMUNICAZIONI (Prati) – 9 gennaio 2025

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è di 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin\left(\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)}\sin(\pi t)$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza $H(f)$

b - Si calcoli l'uscita del sistema quando all'ingresso si pone il segnale $x(t) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = 4\cos(2\pi t)\cos(\pi t)$.

a - Si trovi il massimo valore di T per evitare alias in frequenza.

b - Si consideri la sequenza $x_n = x(2nT)$ dove T è il valore calcolato al punto precedente. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $X(\varphi)$ della sequenza x_n.

c – Si calcoli l'espressione della DFT di 90 campioni di x_n con $0 \leq n \leq 89$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze uniforme con valor medio $m_x = -2$ e varianza unitaria. Si sappia che i campioni a distanza reciproca maggiore di 1 sono tra loro indipendenti.

a - Si scriva l'espressione dell'autocovarianza del processo casuale dato lasciando indicati con parametri i dati mancanti.

b – Si calcoli l'espressione completa dell'autocorrelazione del processo casuale dato sapendo che la potenza della somma di due campioni adiacenti è 19.

Soluzioni – 9 gennaio 2015

ESERCIZIO 1

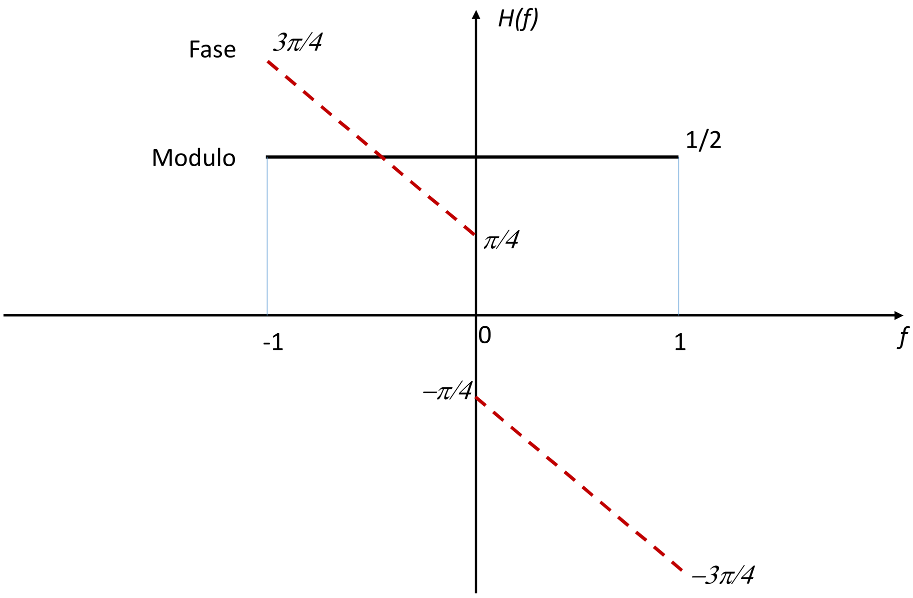
Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin\left(\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)}\sin(\pi t)$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza $H(f)$

La trasformata di $g(t) = \frac{\sin\left(\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)}$ è $G(f) = rect(f)e^{-i2\pi\frac{1}{4}f}$

La trasformata di $h(t) = \frac{\sin\left(\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{4}\right)}\sin(\pi t)$ è $H(f) = \frac{j}{2}G\left(f+\frac{1}{2}\right) - \frac{j}{2}G\left(f-\frac{1}{2}\right)$

I grafici di modulo e fase sono dunque quelli riportati nella seguente figura.



b - Si calcoli l'uscita del sistema quando all'ingresso si pone il segnale $x(t) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)$.

Alle frequenze del coseno $\pm\frac{3}{4}$ il modulo della risposta in frequenza vale ½ e le fase $\mp\frac{5}{8}\pi$ rispettivamente. Dunque l'uscita rimane un coseno alla stessa frequenza con ampiezza dimezzata e fase iniziale $-\frac{5}{8}\pi$:

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{2}\pi t - \frac{5}{8}\pi\right)$$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = 4\cos(2\pi t)\cos(\pi t)$.

a - Si trovi il massimo valore di T per evitare alias in frequenza.

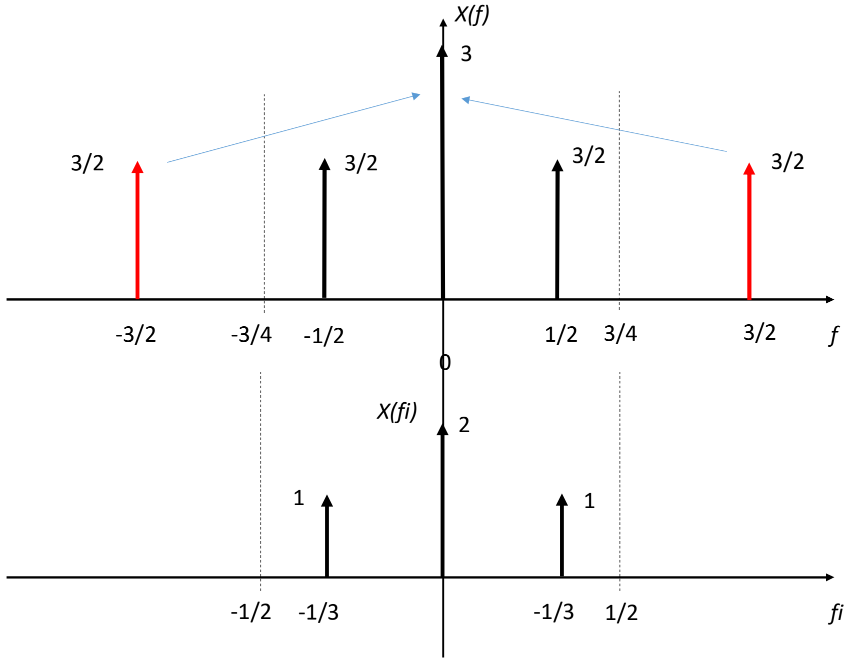
La trasformata di $x(t)$ è: $X(f) = \delta\left(f \pm \frac{3}{2}\right) + \delta\left(f \pm \frac{1}{2}\right)$

Dunque la massima frequenza è 3/2, la minima frequenza di campionamento 3 e il massimo intervallo di campionamento $T = \frac{1}{3}$.

b - Si consideri la sequenza $x_n = x(2nT)$ dove T è il valore calcolato al punto precedente. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $X(\varphi)$ della sequenza x_n.

Campionando $x(t)$ con $T = \frac{2}{3}$ s'introduce alias in frequenza: $\tilde{X}(f) = \frac{3}{2}\cdot 2\,\delta(f) + \frac{3}{2}\delta\left(f \pm \frac{1}{2}\right)$ periodica di periodo 3/2

Passando alla frequenza normalizzata: $\tilde{X}(\varphi) = 2\,\delta(\varphi) + \frac{3}{2}\delta\left(\varphi \pm \frac{1}{3}\right)$ periodica di periodo 1



c – Si calcoli l'espressione della DFT di 90 campioni di x_n con $0 \le n \le 89$.

Dall'espressione di $\tilde{X}(f)$ è facile vedere che il segnale campionato ha la seguente espressione:

$$x_n = 2 + 2\cos\left(2\pi \frac{1}{3} n\right)$$

Dunque la trasformata discreta avrà la seguente espressione:

$$X_k = 180\,\delta_k + 90\,\delta_{k-30} + 90\,\delta_{k-60}$$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze uniforme con valor medio $m_x = -2$ e varianza unitaria. Si sappia che i campioni a distanza reciproca maggiore di 1 sono tra loro indipendenti.

a - Si scriva l'espressione dell'autocovarianza del processo casuale dato lasciando indicati con parametri i dati mancanti.

Dai dati del problema, possiamo scrivere l'espressione dell'autocovarianza nella forma seguente:

$$C_x[m] = \delta_m + a\,\delta_{m\pm1}$$

Infatti l'autocovarianza in $m=0$ è uguale alla varianza del processo $\sigma_x^2 = 1$ e tutti campioni con $|m| > 1$ sono nulli. Dai dati del problema non è possibile calcolare il valore del parametro "a" .

b - Si calcoli l'espressione completa dell'autocorrelazione del processo casuale dato sapendo che la potenza della somma di due campioni adiacenti è 19.

L'autocorrelazione, poi, si trova sommando all'autocovarianza il valor medio al quadrato.

$$R_x[m] = \delta_m + a\,\delta_{m\pm1} + 4$$

Il parametro "a" si calcola sapendo che la potenza della somma di due campioni adiacenti è 19:

$$E[(x_n + x_{n-1})^2] = E[(x_n)^2] + E[(x_{n-1})^2] + 2E[(x_n x_{n-1})] = 5 + 5 + 2(a + 4) = 18 + 2a = 19$$

Da cui il valore del parametro $a = \frac{1}{2}$