Segnali per le comunicazioni – Appello del 19/1/2021

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin(4\pi f_o t)}{2\pi f_o t}\sin(2\pi f_o t)$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$.

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$

C) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 5f_o$ ottenendo il segnale discreto x_n.

Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo $x_R(t)$ ricostruito dai campioni del segnale discreto x_n.

Soluzione Esercizio 1 del 19/1/2021

Sia dato il segnale $x(t)=\frac{\sin(4\pi f_o t)}{2\pi f_o t}\sin(2\pi f_o t)$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$.

$$X(f)=\frac{j}{2}[-\delta(f-f_o)+\delta(f+f_o)]*\frac{1}{2f_o}\cdot rect\left(\frac{f}{4f_o}\right)=\frac{j}{4f_o}\cdot rect\left(\frac{f+f_o}{4f_o}\right)-\frac{j}{4f_o}\cdot rect\left(\frac{f-f_o}{4f_o}\right)$$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$

$$|X(f)|=\begin{cases}\frac{1}{4f_o} & -3f_o<f<-f_o\\ 0 & -f_o\le f\le f_o\\ \frac{1}{4f_o} & f_o<f<3f_o\end{cases}$$

$$fase_{X(f)}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & -3f_o<f<-f_o\\ indefinita & -f_o\le f\le f_o\\ -\frac{\pi}{2} & f_o<f<3f_o\end{cases}$$

C) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s=5f_o$ ottenendo il segnale discreto x_n.

Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo $x_R(t)$ ricostruito dai campioni del segnale discreto x_n.

$$\tilde{X}(f)=5f_o\cdot\frac{j}{4f_o}\cdot rect\left(f+\frac{3}{2}f_o\right)-5f_o\cdot\frac{j}{4f_o}\cdot rect\left(f-\frac{3}{2}f_o\right)\ periodica\ 5f_o$$

$$X_R(f)=\frac{j}{4f_o}\cdot rect\left(f+\frac{3}{2}f_o\right)-\frac{j}{4f_o}\cdot rect\left(f-\frac{3}{2}f_o\right)$$

$$x_R(t)=\frac{j}{4f_o}\frac{\sin\pi f_o t}{\pi t}e^{-j3\pi f_o t}-\frac{j}{4f_o}\frac{\sin\pi f_o t}{\pi t}e^{j3\pi f_o t}=\frac{1}{2f_o}\frac{\sin\pi f_o t}{\pi t}\ \sin 3\pi t$$

Segnali per le comunicazioni – Appello del 19/1/2021

<u>Esercizio 2</u>

Sia dato il processo casuale stazionario tempo discreto x_n con densità di probabilità delle ampiezze uniforme e valor medio 6. Sapendo che l'auto-covarianza del processo ha la seguente espressione

$$C_x[m] = 3\delta_m - \delta_{m-2} - \delta_{m+2}$$

A) Si dicano quali sono i valori minimi e massimo che possono assumere i campioni del processo x_n.

B) Si trovi la potenza della media di due campioni qualsiasi del processo x_n, cioè la potenza di

$y_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+k}$ con k intero qualsiasi.

Soluzione Esercizio 2 del 19/1/2021

Sia dato il processo casuale stazionario tempo discreto x_n con densità di probabilità delle ampiezze uniforme e valor medio 6. Sapendo che l'auto-covarianza del processo ha la seguente espressione

$C_x[m] = 3\delta_m - \delta_{m-2} - \delta_{m+2}$

A) Si dicano quali sono i valori minimi e massimo che possono assumere i campioni del processo x_n.

La varianza del processo è data dal valore da $\sigma_x^2 = C_x[0] = 3$.

La varianza di una densità di probabilità uniforme è data da $\sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 3.$

Da qui $\Delta = 6$, ed essendo il valor medio 6, la densità di probabilità uniforme si estende da 3 a 9 e dunque il minimo delle ampiezze vale 3 e il massimo 9.

B) Si trovi la potenza della media di due campioni qualsiasi del processo x_n.

Si deve calcolare la potenza del processo $y_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+k}$

Data la forma dell'auto-covarianza si nota che se i 2 campioni sono a distanza diversa da 2 sono incorrelati e quindi la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze.

La potenza di $y_n = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+k}$ è data da:

$P_y = E[y_n^2] = \frac{1}{4}E[x_n^2] + \frac{1}{4}E[x_{n+k}^2] + \frac{1}{2}E[x_n x_{n+k}] = \frac{1}{2}R_x[0] + \frac{1}{2}R_x[k]$

L'autocorrelazione del processo dato vale:

$R_x[m] = 3\delta_m - \delta_{m-2} - \delta_{m+2} + m_x^2$

Dunque:

Se $k = 0$ $\quad P_y = R_x[0] = 39$ ovviamente uguale alla potenza del processo originale.

Se $k \neq 0 \;\; e \; k \neq 2$ $\quad P_y = \frac{1}{2}R_x[0] + 18 = \frac{3}{2} + 18 + 18 = 37.5$ stesso risultato che si ottiene notando che se i campioni sono a distanza diversa da 2 e da 0 sono incorrelati e quindi la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze.

Se $k = 2$ $\quad P_y = \frac{1}{2}R_x[0] + \frac{1}{2}R_x[2] = \frac{3}{2} + 18 - \frac{1}{2} + 18 = 37$