SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
quarto appello – 3 Febbraio 2011

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 2\frac{\sin \pi t}{\pi t}\cos(4\pi t)$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza $H(f)$.

b - Si calcoli l'uscita del sistema all'ingresso $x(t) = [\cos(2\pi f_o t)]^2$ in funzione di f_o.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = 4\cos(2\pi f_o t)\cos(3\pi f_o t)$.

a - Si calcoli la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento pari alla metà di quella calcolata al punto precedente. Verificare che l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato ha la seguente espressione: $x(t) = 4\cos^2\left(\pi \frac{f_o}{2} t\right)$

c –Si calcoli la DFT dei primi 10 campioni del segnale campionato (n da 0 a 9).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto x_n, stazionario, gaussiano con valor medio unitario e funzione di autocovarianza $C_x[m] = 8\delta_m - \delta_{m-1} - \delta_{m+1}$.

a - Si calcoli la potenza del processo dato.

b – Si disegni la densità di probabilità dell'ampiezza dei campioni del processo (e' richiesto un grafico qualitativo in cui si riportino valori approssimati sugli assi).

c - Il processo x_n passa attraverso ad un sistema Lineare Tempo Invariante con risposta all'impulso $h_n = \delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-1}$. Si calcoli la potenza del processo in uscita da sistema LTI.

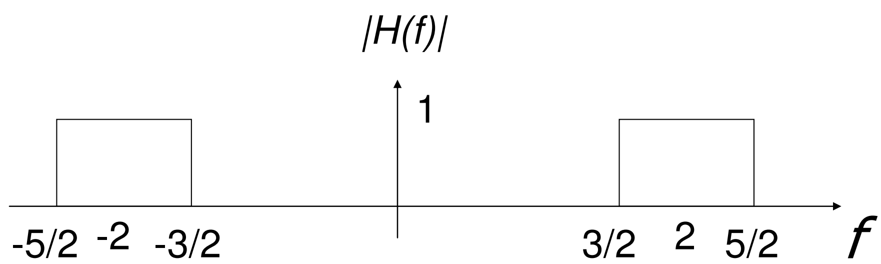
TELECOMUNICAZIONI quarto appello (Prati) – 3 Febbraio 2011

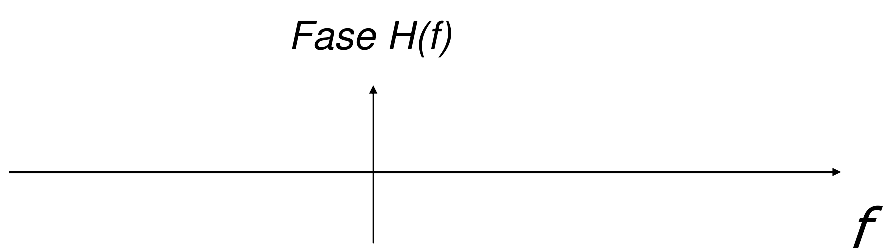
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza e'

$H(f) = rect(f-2) + rect(f+2)$





b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t) = [\cos(2\pi f_o t)]^2$ è formata da 3 impulsi alle frequenze 0, $2f_o$ e $-2f_o$.

L'uscita e' dunque:

$y(t) = \frac{1}{2}\cos(4\pi f_o t)$ se $\frac{3}{4} < |f_o| < \frac{5}{4}$, altrimenti è nulla.

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale e' data da

$$X(f)=4\left[\frac{1}{2}\delta(f+f_o)+\frac{1}{2}\delta(f-f_o)\right]*\left[\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{3}{2}f_o\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{3}{2}f_o\right)\right]=$$
$$=\delta\left(f+\frac{5}{2}f_o\right)+\delta\left(f-\frac{5}{2}f_o\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2}f_o\right)+\delta\left(f-\frac{1}{2}f_o\right)$$

la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza è dunque $5f_o$.

b – La frequenza di campionamento utilizzata è $\frac{5}{2}f_o$.
A causa dell'alias la trasformata del segnale campionato e':

$$X(f)=5f_o\delta(f)+\frac{5}{2}f_o\delta\left(f-\frac{1}{2}f_o\right)+\frac{5}{2}f_o\delta\left(f+\frac{1}{2}f_o\right)$$ periodica di periodo $\frac{5}{2}f_o$.

Per ricostrire il segnale tempo-continuo è necessario filtrare passa-basso nella banda $\pm\frac{5}{4}f_o$ moltiplicando per il coefficiente $\frac{2}{5f_o}$. La trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X(f)=2\delta(f)+\delta\left(f-\frac{1}{2}f_o\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2}f_o\right)$$

L'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato è:

$$x(t)=2+2\cos(\pi f_o t)=4\cos^2\left(\pi\frac{f_o}{2}t\right)$$

c – Il segnale campionato ha la seguente espressione:

$$x(t)=2+2\cos(\pi f_o nT)=2+2\cos\left(\pi f_o n\frac{2}{5f_o}\right)=2+2\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

La DFT dei primi 10 campioni ha dunque la seguente espressione:

$$X_k=20\delta_k+10\delta_{k-2}+10\delta_{k-8}$$

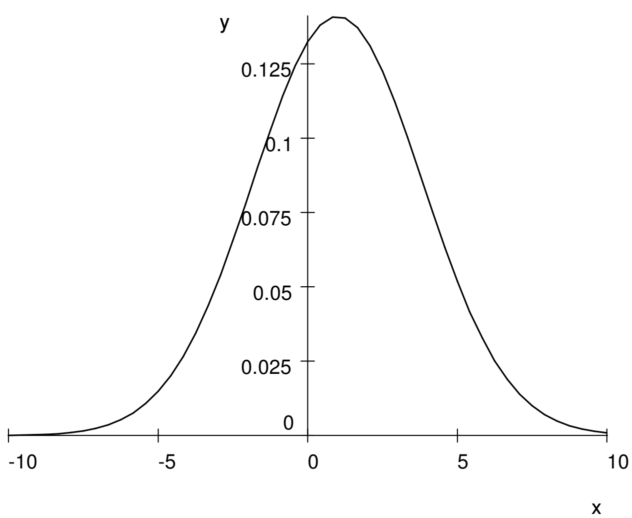
ESERCIZIO 3

a – La potenza di un processo è data dal valore dell'autocorrelazione in 0.
Dai dati del problema:

$$R_x[m] = C_x[m] + 1 = 8\delta_m - \delta_{m-1} - \delta_{m+1} + 1$$
$$R_x[0] = 8 + 1 = 9$$

b - La densità di probabilità dell'ampiezza dei campioni del processo è una gaussiana centrata in 1 con area unitaria e altezza che si riduce quasi a zero in $a = 1 \pm 3\sigma = 1 \pm 3\sqrt{8}$

$$p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{(a-1)^2}{2\sigma_x^2}\right\} = 0.14 \exp\left\{-\frac{(a-1)^2}{16}\right\}$$



c - L'autorrelazione dell'uscita è data da:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = (8\delta_m - \delta_{m-1} - \delta_{m+1} + 1) * \left(\frac{5}{4}\delta_m - \frac{1}{2}\delta_{m-1} - \frac{1}{2}\delta_{m+1}\right)$$

La potenza di un processo in uscita è data dal valore dell'autocorrelazione in 0. Quindi non serve calcolare tutta l'autocorrelazione dell'uscita, ma solo il suo campione in m=0:

$$R_y[0] = 8\frac{5}{4} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{45}{4}$$