TELECOMUNICAZIONI quarto appello - 16 Settembre 2013

La prima parte degli esercizi presenta una difficoltà minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h e 15min.
I punteggi indicano unicamente il peso relativo dell'esercizio.

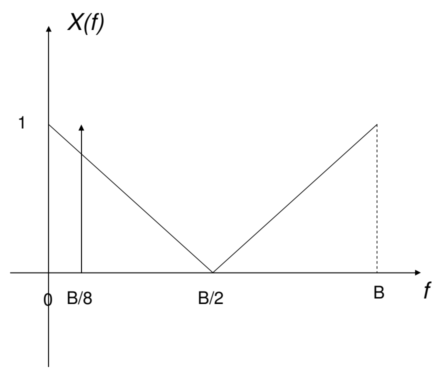
ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t)=\left[\frac{\sin \pi B(t+\tau)}{\pi(t+\tau)}\right]^2$.

a [6/30]- Si traccino i grafici di modulo e fase della trasformata di Fourier del segnale dato.
b [5/30]- Si calcoli l'energia del segnale dato.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier è rappresentata nella seguente figura.



a [6/30]- Si traccino i grafici, sia in frequenza sia in frequenza normalizzata, della trasformata di Fourier del segnale discreto x_n ottenuto campionando $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s=\frac{B}{2}$.
b [5/30]**-** Si trovi l'espressione della trasformata discreta di Fourier dei primi 200 campioni $0 \le n \le 199$ del segnale campionato x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n la cui densità spettrale di potenza è
$S_x(\phi)=\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi\phi)]$.

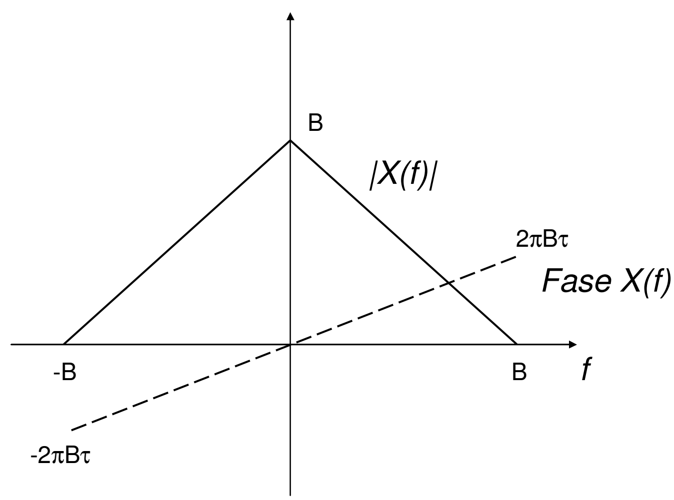
a [4/30]- Calcolare la potenza del processo casuale x_n.
b [4/30]– Calcolare il coefficiente di correlazione del processo casuale x_n .
c [4/30]– Calcolare la densità spettrale di potenza del processo casuale $y_n = x_n + x_{n-1}$

TELECOMUNICAZIONI quarto appello – 16 Settembre 2013

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Il modo più semplice per calcolare la trasformata è quello di trascurare il ritardo, ottenendo come trasformata un triangolo a fase nulla, quindi introdurre l'effetto del ritardo che aggiunge un afase lineare in frequenza.



---

b – L'energia si calcola direttamente nel dominio delle frequenze: $E = \int \left| X\left(f\right) \right|^2 df$

$$\left| X(f) \right| = \begin{cases} f + B & -B \le f \le 0 \\ -f + B & 0 \le f \le B \end{cases}$$

$$E = \int_{-B}^{0} \left(f + B\right)^2 df + \int_{0}^{B} \left(-f + B\right)^2 df = \frac{2}{3} B^3$$

ESERCIZIO 2

a- Campionando $x(t)$ con $f_s = \frac{B}{2}$ la trasformata $X(f)$ viene moltiplicata per $\frac{B}{2}$ e periodicizzata a passo $\frac{B}{2}$. Troviamo:

$$\tilde{X}(f) = B/2 + B/2\,\delta\left(f + \frac{B}{8}\right) \text{ periodica } \frac{B}{2}$$

Passando alla frequenza normalizzata:

$$\tilde{X}(\phi) = \frac{B}{2} + \delta\left(\phi - \frac{1}{4}\right) \text{ periodica 1.}$$

b – Il risultato ottenuto al punto precedente mostra che a valle del campionamento si e' ottenuto un esponenziale complesso di frequenza normalizzata ¼ cioe' di periodo 4 più una costante $\frac{B}{2}$. In 200 campioni ci sono esattamente 50 cicli dell'esponenziale complesso. Quindi:

$$X_k = 100B\delta_k + 200\delta_{k-50}$$

ESERCIZIO 3

a- La potenza del processo casuale x_n si ottiene integrando la densità spettrale di potenza:

$$P = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(\phi)d\phi = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi\phi)]d\phi = \frac{1}{2}$$

b - Il coefficiente di correlazione del processo casuale x_n si ottiene dalla sua autocorrelazione che è la trasformata inversa di $S_x(\phi) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi\phi)]$:

$$R_x[m] = \frac{1}{2}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1}$$

$$\rho_x[m] = \frac{R_x[m]}{\sigma_x^2} = \delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}$$

c - La densità spettrale di potenza del processo casuale $y_n = x_n + x_{n-1}$ si ottiene dalla nota formula:

$$S_y(\phi) = S_x(\phi)\left|H(\phi)\right|^2 = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\pi\phi)\right]\left|1+e^{-j2\pi\phi}\right|^2 = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2\pi\phi)\right]2\left[1+\cos(2\pi\phi)\right] = \left[1+\cos(2\pi\phi)\right]^2$$

Si potrebbe anche passare dal dominio del tempo, ma i conti sarebbero più lunghi.