SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 15 Gennaio 2018

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Si consideri il segnale $x(t) = A\sin(2\pi Bt)$.

a - Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier del segnale $y(t) = x(t+\tau) - x(t-\tau)$ per un generico valore di τ.

b - Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale $z(t)$ ottenuto moltiplicando $y(t)$ per $u(t) = \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$ nel caso in cui $\tau = \frac{1}{4B}$.

c - Si calcoli l'energia del segnale $z(t)$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale tempo-continuo $x(t) = \left[\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\right]^2$.

Il segnale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{2}B$ ottenendo il segnale discreto x_n.

a - Si traccino i grafici della Trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

b - Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale gaussiano stazionario $x(t)$ con valor medio m_x, varianza σ_x^2 e coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau) = \frac{\sin(10\pi B\tau)}{10\pi B\tau}$.

a - Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione e della densità spettrale di potenza del processo casuale $x(t)$ e del processo x_n ottenuto campionando il processo dato con frequenza di campionamento di B Hz.

b – Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione del processo casuale y_n ottenuto filtrando x_n con la risposta all'impulso $h_n = \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{4}\delta_{n-1}$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 15 Gennaio 2018

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) La trasformata di Fourier del generico segnale $y(t) = x(t+\tau) - x(t-\tau)$ ha la seguente espressione:

$$Y(f) = X(f) \cdot [\exp\{j2\pi f\tau\} - \exp\{-j2\pi f\tau\}] = 2jX(f) \cdot \sin(2\pi f\tau)$$

Nel caso specifico in cui $x(t) = A\sin(2\pi Bt)$, abbiamo:

$$X(f) = A\frac{j}{2}\delta(f+B) - A\frac{j}{2}\delta(f-B)$$

$$Y(f) = 2jA\sin(2\pi f\tau)\left[\frac{j}{2}\delta(f+B) - \frac{j}{2}\delta(f-B)\right] = A\sin(2\pi B\tau)[\delta(f+B) + \delta(f-B)]$$

b) Nel caso in cui $\tau = \frac{1}{4B}$, si ottiene $Y(f) = A\delta(f+B) + A\delta(f-B)$. La trasformata del segnale $u(t) = \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$ è un rettangolo di banda bilatera B. La trasformata di $z(t) = y(t) \cdot u(t)$ è data dalla convoluzione delle relative trasformate:

$$Z(f) = A[\delta(f+B) + \delta(f-B)] * rect\left(\frac{f}{B}\right) = Arect\left(\frac{f-B}{B}\right) + Arect\left(\frac{f+B}{B}\right)$$

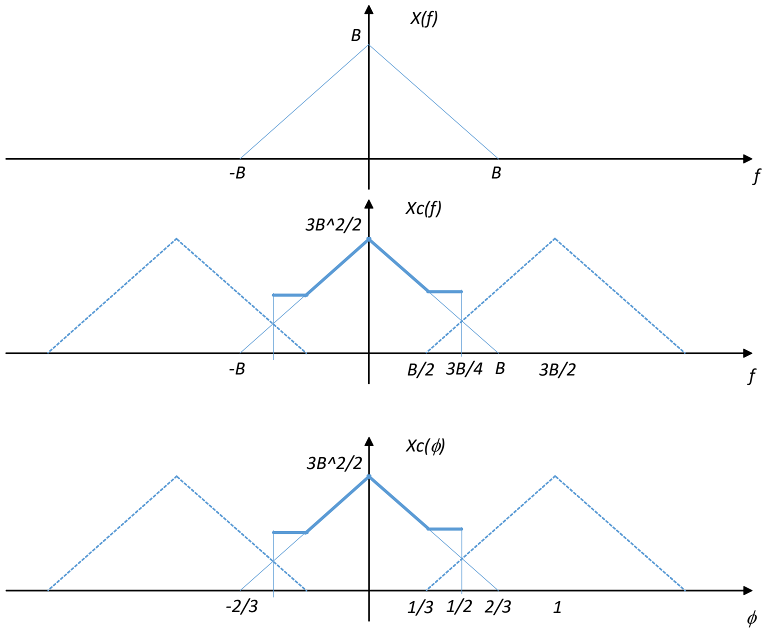
c) L'energia del segnale $z(t)$ è $2BA^2$.

ESERCIZIO 2

a – La trasformata $X(f)$ è formata da un triangolo di banda bilatera $2B$ e altezza B.

La minima frequenza di campionamento per evitare alias è dunque $2B$.

A causa del campionamento si creano delle cancellazioni ottenendo i seguenti grafici delle trasformate in frequenza e frequenza normalizzata.



b – A causa delle sovrapposizioni spettrali introdotte dall'alias in frequenza, la trasformata del segnale ricostruito può essere scritta come somma di un rettangolo di banda bilatera $3B/2$ e altezza $B/2$ con un triangolo di banda bilatera B e altezza $B/2$. Dunque, il segnale ricostruito ha la seguente espressione:

$$x(t) = \frac{B}{2}\frac{\sin\left(3\pi\frac{B}{2}t\right)}{\pi t} + \left[\frac{\sin\left(\pi\frac{B}{2}t\right)}{\pi t}\right]^2$$

ESERCIZIO 3

a – In generale l'espressione dell'autocorrelazione si trova a partire da quella del coefficiente di correlazione nel modo seguente:

$$R_x(\tau)=\sigma_x^2\rho_x(\tau)+m_x^2$$

Dunque: $R_x(\tau)=\sigma_x^2\dfrac{\sin(10\pi B\tau)}{10\pi B\tau}+m_x^2$

$$S_x(f)=\frac{\sigma_x^2}{10B}rect\left(\frac{f}{10B}\right)+m_x^2\delta(f)$$

A causa del campionamento a passo $T=\dfrac{1}{B}$ si ottiene la seguente espressione dell'autocorrelazione campionata:

$$R_x[m]=\frac{\sin\left(10\pi B\dfrac{m}{B}\right)}{10\pi B\dfrac{m}{B}}+m_x^2=\sigma_x^2\delta_m+m_x^2$$

e di conseguenza

$S_x(\phi)=\sigma_x^2+m_x^2\delta(\phi)$ periodica di periodo 1 oppure, in frequenza, $S_x(f)=\sigma_x^2+\dfrac{m_x^2}{B}\delta(f)$ periodica di periodo B.

b – Procedimento per il calcolo dell'autocorrelazione dell'uscita di una sistema LTI:

Il processo x_n viene convoluto con la all'impulso: $h_n=\dfrac{1}{2}\delta_n+\dfrac{1}{4}\delta_{n-1}$ e dunque:

$$R_y[m]=R_x[m]*h_m*h_{-m}=\left(\sigma_x^2\delta_m+m_x^2\right)*\left(\frac{1}{8}\delta_{m+1}+\frac{5}{16}\delta_m+\frac{1}{8}\delta_{m-1}\right)=$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{8}\delta_{m+1}+\frac{5\sigma_x^2}{16}\delta_m+\frac{\sigma_x^2}{8}\delta_{m-1}+\frac{9}{16}m_x^2$$

Da cui si deduce che il valor medio dell'uscita vale $\sqrt{\dfrac{9}{16}m_x^2}=\dfrac{3}{4}m_x$ così come si otterrebbe sommando il coefficienti della risposta all'impulso.