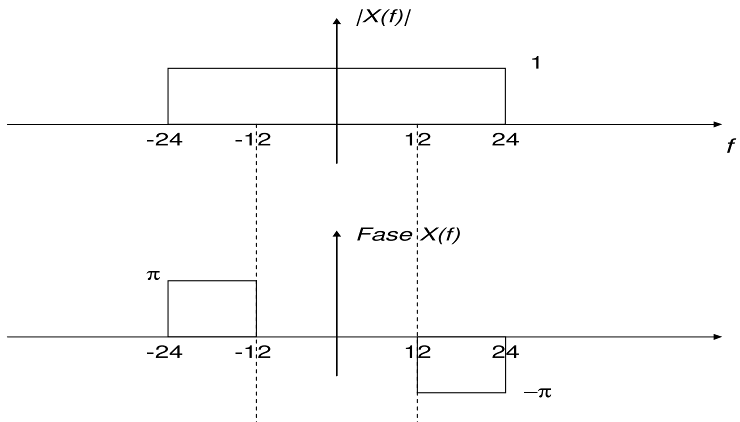
SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
QUARTO APPELLO – 10 Febbraio 2012

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier $X(f)$ ha modulo e fase espressi dai seguenti grafici:



a - Il segnale $x(t)$ è reale? Perchè'?
b - Si traccino i grafici di parte reale e immaginaria di $X(f)$.
b - Si calcoli l'uscita all'ingresso $x(t)$ del sistema con risposta all'impulso $h(t) = 3\delta(t)$

ESERCIZIO 2

Un segnale $x(t)$ campionato con frequenza di campionamento $f_s = 20kHz$, genera la seguente sequenza di lunghezza finita: $x_n = \frac{1}{2}\delta_{n+1} + \delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-1}$.

a - Si ricostruisca l'espressione del segnale $x(t)$ che ha generato la sequenza x_n senza introdurre il fenomeno dell'alias in frequenza.

b – Si calcolino le espressioni della trasformata di Fourier della sequenza x_n in frequenza (*f*) e frequenza normalizzata (ϕ).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale discreto stazionario x_n, i cui campioni sono tra loro indipendenti e hanno ampiezze con la seguente densità di probabilità: $p_{x_n}(a) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(a-1)^2}{8}}$.

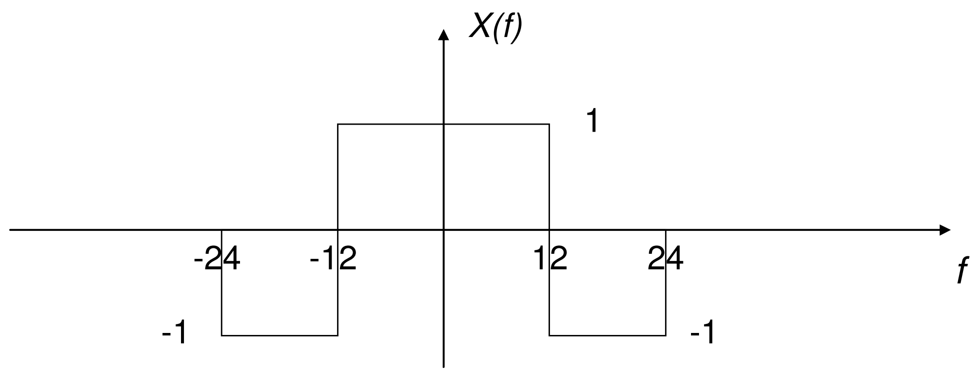
a - Si calcoli la potenza del processo casuale.
b – Il processo x_n viene filtrato con un sistema Lineare Tempo Invariante con risposta all'impulso $h_n = \delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-1} + \frac{1}{4}\delta_{n-2}$. Si calcoli l'espressione del coefficiente di correlazione del processo filtrato y_n.

TELECOMUNICAZIONI QuartoApello (Prati) – 10 Febbraio 2012

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Il segnale e' reale perchè la sua trasformata presenta una simmetria Hermitiana (complessa coniugata).
b – La trasformata e' reale:



c – La trasformata dell'uscita è:

$$Y(f) = X(f)H(f) = 3H(f)$$

Da cui:

$$y(t) = 3\frac{\sin(\pi \cdot 24 \cdot t)}{\pi \cdot t} - 6\frac{\sin(\pi \cdot 12 \cdot t)}{\pi \cdot t}\cos(2 \cdot \pi \cdot 18 \cdot t)$$

ESERCIZIO 2

a - Ponendo $f_s = 20kHz$ e $T = \frac{1}{f_s} = 50\mu s$, il segnale ricostruito ha la seguente espressione:

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin \pi f_s (t+T)}{\pi f_s (t+T)} + \frac{\sin \pi f_s t}{\pi f_s t} + \frac{1}{2}\frac{\sin \pi f_s (t-T)}{\pi f_s (t-T)}$$

b – La trasformata di Fourier della sequenza x_n in frequenza normalizzata ha la seguente espressione:

$$X(\phi) = \sum_n x_n e^{-j2\pi\phi n} = 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\phi} + \frac{1}{2}e^{j2\pi\phi} = 1 + \cos 2\pi\phi$$

Per passare da frequenza normalizzata a frequenza è suffuciente sostituire $\phi = \frac{f}{f_s}$

ESERCIZIO 3

a – Il processo dato è gaussiano con varianza 4 e valor medio unitario. La potenza è dunque

$$P = E\left[x_n^2\right] = \sigma_x^2 + m_x^2 = 5$$

b - Il valor medio del processo filtrato vale:

$$m_y = m_x \cdot \sum h_n = 1 \cdot (1 + 1/2 + 1/4) = 7/4$$

L'autocorrelazione del processo filtrato y_n vale:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = (4\delta_m + 1) * \left(\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m-2} \right) * \left(\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m+1} + \frac{1}{4}\delta_{m+2} \right) =$$

$$= (4\delta_m + 1) * \left(\frac{1}{4}\delta_{m+2} + \frac{5}{8}\delta_{m+1} + \frac{21}{16}\delta_m + \frac{5}{8}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m-2} \right) = \delta_{m+2} + \frac{5}{2}\delta_{m+1} + \frac{21}{4}\delta_m + \frac{5}{2}\delta_{m-1} + \delta_{m-2} + \frac{49}{16}$$

L'autocovarianza:

$$C_x[m] = R_x[m] - |m_x|^2 = \delta_{m+2} + \frac{5}{2}\delta_{m+1} + \frac{21}{4}\delta_m + \frac{5}{2}\delta_{m-1} + \delta_{m-2}$$

Il coefficiente di correlazione:

$$\rho_y[m] = \frac{C_y[m]}{\sigma_y^2} = \frac{\delta_{m+2} + \frac{5}{2}\delta_{m+1} + \frac{21}{4}\delta_m + \frac{5}{2}\delta_{m-1} + \delta_{m-2}}{21/4} = \frac{4}{21}\delta_{m+2} + \frac{10}{21}\delta_{m+1} + \delta_m + \frac{10}{21}\delta_{m-1} + \frac{4}{21}\delta_{m-2}$$