SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI quarto appello – 2 Ottobre 2015

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left[rect\left(\frac{(t+\tau)}{10} \right) * rect\left(\frac{t}{10} \right) \right] \exp\left\{ j2\pi \frac{1}{10} t \right\}$.

a - Si calcoli l'espressione della risposta in frequenza.

b- Si calcoli l'uscita *y(t)* e la sua potenza quando all'ingresso del sistema si pone il segnale $x(t) = \exp\left\{ j2\pi \frac{t}{5} \right\} + \exp\left\{ j2\pi \frac{t}{10} \right\} + \exp\left\{ j2\pi \frac{t}{2} \right\}$

ESERCIZIO 2

Il segnale tempo continuo $x(t) = \exp\{ j(20\pi t + \varphi)\} \cdot \exp\{ j30\pi(t+\tau)\}$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 45$ Hz ottenendo il segnale discreto x_n .

a - Si ricavi l'espressione della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ e della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $\tilde{X}(\phi)$ del segnale discreto x_n .

b - Si ricavi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n .

ESERCIZIO 3

Il processo casuale stazionario discreto x_n con valor medio unitario e varianza $\sigma_x^2 = \frac{4}{3}$ è costituito da campioni indipendenti gli uni dagli altri con densità di probabilità delle ampiezze uniforme.

a - Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale x_n .

b - Si trovi il coefficiente di correlazione del processo y_n ottenuto mediando coppie di campioni adiacenti di x_n .

c - Si calcoli il valor medio e varianza del processo $|x_n|$ (*suggerimento: si parta dalla densità di probabilità di* x_n *e si ricavi quella di* $|x_n|$).

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI quarto appello – 2 Ottobre 2015

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Il calcolo procede come segue:

1 – La trasformata di $rect\left(\frac{t}{10}\right)$ è $\frac{\sin \pi 10 f}{\pi f}$;

2 - La trasformata di $rect\left(\frac{(t+\tau)}{10}\right)$ è $\frac{\sin \pi 10 f}{\pi f}\exp\{j2\pi\tau f\}$;

3 - La trasformata di $rect\left(\frac{(t+\tau)}{10}\right) * rect\left(\frac{t}{10}\right)$ è $\left(\frac{\sin \pi 10 f}{\pi f}\right)^2 \exp\{j2\pi\tau f\}$;

4 – Infine la trasformata di $h(t) = \left[rect\left(\frac{(t+\tau)}{10}\right) * rect\left(\frac{t}{10}\right)\right]\exp\left\{j2\pi\frac{t}{10}\right\}$ è

$$H(f) = \left(\frac{\sin \pi 10\left(f - \frac{1}{10}\right)}{\pi\left(f - \frac{1}{10}\right)}\right)^2 \exp\left\{j2\pi\tau\left(f - \frac{1}{10}\right)\right\} .$$

b - Gli zeri della risposta in frequenza data si trovano alle frequenze $\frac{k}{10}$ con $k \neq 1$

La trasformata di Fourier dell'ingresso vale:

$$X(f) = \delta\left(f - \frac{1}{5}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{10}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

Dato che $H(f) = 0$ alle frequenze $f = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ e $f = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, l'unica componente che non viene annullata dal sistema è alla frequenza $f = \frac{1}{10}$.

La trasformata dell'uscita ha quindi la seguente espressione:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \delta\left(f - \frac{1}{10}\right)\left(\frac{\sin \pi 10\left(f - \frac{1}{10}\right)}{\pi\left(f - \frac{1}{10}\right)}\right)^2 \exp\left\{j2\pi\tau\left(f - \frac{1}{10}\right)\right\} = 100\delta\left(f - \frac{1}{10}\right)$$

L'espressione dell'uscita è: $100\exp\left\{j2\pi\frac{t}{10}\right\}$ e la sua potenza 10000.

ESERCIZIO 2

a – Il segnale tempo continuo dato si può esprimere come:

$$x(t)=\exp\{j(20\pi t+\varphi)\}\cdot\exp\{j30\pi(t+\tau)\}=\exp\{j(50\pi t+\varphi+30\pi\tau)\}=\exp\{j50\pi t\}\cdot\exp\{j(\varphi+30\pi\tau)\}$$

La sua trasformata è:

$$X(f)=\exp\{j(\varphi+30\pi\tau)\}\delta(f-25)$$

La trasformata $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto ha periodicità $f_s=45$ e, a causa dell'alias in frequenza, il periodo in banda base $\left(-{f_s}/{2}\leq f<{f_s}/{2}\right)$ ha la seguente espressione:

$$\tilde{X}(f)=45\exp\{j(\varphi+30\pi\tau)\}\delta(f+20)$$

In frequenza normalizzata:

$$\tilde{X}(\phi)=\exp\{j(\varphi+30\pi\tau)\}\delta\left(\phi+\frac{4}{9}\right)$$ con periodicità 1.

c – Il segnale tempo continuo si ricostruisce filtrando la trasformata $\tilde{X}(f)$. Il filtro di ricostruzione è rettangolare nella banda $-\frac{f_s}{2}<f<\frac{f_s}{2}$ di ampiezza $\frac{1}{f_s}$.

Dunque la trasformata di Fourier del segnale tempo continuo ricostruito è:

$$X_R(f)=\exp\{j(\varphi+30\pi\tau)\}\delta(f+20)$$

Da qui l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito:

$$x_R(t)=\exp\{j(\varphi+30\pi\tau)\}\exp\{-j40\pi t\}$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema l'autocorrelazione ha la seguente espressione:

$$R_x[m]=\frac{4}{3}\delta_m+1$$

La densità spettrale di potenza vale $S_x(\phi) = \frac{4}{3} rect(\phi) + \delta(\phi)$ (periodica di periodo 1)

b - Il processo casuale y_n può essere scritto come uscita di un sistema LTI con $h_n = \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-1}$ alimentato da x_n.

L'autocorrelazione del processo y_n si ottiene come:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\frac{4}{3}\delta_m + 1\right) * \left(\frac{1}{2}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1}\right) = \frac{2}{3}\delta_m + \frac{1}{3}\delta_{m-1} + \frac{1}{3}\delta_{m+1} + 1$$

Il valor del processo y_n è unitario e l'autocovarianza è:

$$C_y[m] = R_y[m] - 1 = \frac{2}{3}\delta_m + \frac{1}{3}\delta_{m-1} + \frac{1}{3}\delta_{m+1}$$

Il coefficiente di correlazione:

$$\rho_y[m] = \frac{C_y[m]}{\sigma_y^2} = \delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}$$

c - La densità di probabilità di x_n è uniforme tra -1 e 3. Considerando $|x_n|$, i valori di x_n compresi tra -1 e 0 diventano positivi. Dunque la densità di probabilità di $|x_n|$ tra 0 e 1, pur rimanendo uniforme, avrà valore doppio di quella uniforme tra 1 e 3.
In conclusione la densità di probabilità di $|x_n|$ sarà uniforme uguale a $\frac{1}{2}$ tra 0 e 1 e uniforme uguale a $\frac{1}{4}$ tra 1e 3. I calcoli di valor medio, valore quadratico medio e varianza procedono come segue:

$$m_{|x_n|} = \int_0^1 a\frac{1}{2}da + \int_1^3 a\frac{1}{4}da = \frac{1}{4} + \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

$$E\left[|x_n|^2\right] = \int_0^1 a^2\frac{1}{2}da + \int_1^3 a^2\frac{1}{4}da = \frac{1}{6} + \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{3}$$

$$\sigma^2_{|x_n|} = \frac{7}{3} - \frac{25}{16} = \frac{112-75}{48} = \frac{37}{48}$$