TELECOMUNICAZIONI quarto appello – 2 Febbraio 2010

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale continuo $x(t) = \cos^2[2\pi f_0(t-\tau)]$.

a - Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

b – Il segnale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_c = 3f_0$. Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato $x_c(t)$.

c – Si ricostruisce il segnale tempo continuo filtrando il segnale campionato con il filtro di ricostruzione passa-basso ideale. Si trovi l'espressione del segnale ricostruito.

ESERCIZIO 2

La Trasformata Discreta di Fourier (DFT) del segnale x_n di 16 campioni ha la seguente espressione:

$$X_k = 16\delta_k - j8\delta_{k-1} + j8\delta_{k-15}$$

a - Si trovi l'espressione del segnale x_n

b - Si trovi l'espressione della DFT del segnale $y_n = x_n - 2$

c - Si trovi l'espressione della DFT del segnale $y_n = x_n - 2\delta_n$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n gaussiano, con valor medio $m_x = 2$ e autocovarianza $C_x[m] = \frac{1}{5}\delta_{m+1} + \delta_m + \frac{1}{5}\delta_{m-1}$.

a – Si calcoli valor medio e varianza del processo casuale $y_n = 3x_n + x_{n-1}$.

b - Si calcoli la densita'di probabilita' delle ampiezze del processo casuale y_n.

c - Si calcoli la cross-correlazione tra i processi casuale y_n e x_n.

TELECOMUNICAZIONI quarto appello – 2 Febbraio 2010

Soluzioni

ESERCIZIO 1

a - L'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ si può calcolare come convoluzione della trasformata di 2 coseni oppure ricordando che:

$$x(t) = \cos^2[2\pi f_0(t-\tau)] = \frac{1}{2}\{1+\cos[4\pi f_0(t-\tau)]\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\exp\{j4\pi f_0(t-\tau)\} + \frac{1}{4}\exp\{-j4\pi f_0(t-\tau)\}$$

Da cui:

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\exp\{-j4\pi f_0\tau\}\delta(f-2f_0) + \frac{1}{4}\exp\{j4\pi f_0\tau\}\delta(f+2f_0)$$

b – Il segnale $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_c = 3f_0$ per cui s'introduce dell'alias in frequenza:

$$X_c(f) = \frac{3f_0}{2}\delta(f) + \frac{3f_0}{4}\exp\{-j4\pi f_0\tau\}\delta(f+f_0) + \frac{3f_0}{4}\exp\{j4\pi f_0\tau\}\delta(f-f_0) \quad \text{periodica di } f_c = 3f_0$$

c – Si ricostruisce il segnale tempo continuo filtrando il segnale campionato con il filtro di ricostruzione passa-basso ideale. L'espressione della trasformata del segnale ricostruito è:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\exp\{-j4\pi f_0\tau\}\delta(f+f_0) + \frac{1}{4}\exp\{j4\pi f_0\tau\}\delta(f-f_0)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\exp\{-j2\pi f_0(t+2\tau)\} + \frac{1}{4}\exp\{j2\pi f_0(t+2\tau)\} = \frac{1}{2}\{1+\cos[2\pi f_0(t+2\tau)]\} = \cos^2[\pi f_0(t+2\tau)]$$

ESERCIZIO 2

La Trasformata Discreta di Fourier (DFT) del segnale x_n di 16 campioni ha la seguente espressione:

$$X_k = 16\delta_k - j8\delta_{k-1} + j8\delta_{k-15}$$

a - L'espressione del segnale x_n si trova sfruttando la linearità della DFT e ricordando che:

1- La IDFT di $16\delta_k$ è una costante unitaria (dato che N=16)

2- La IDFT di $-j8\delta_{k-1}$ è $\frac{-j}{2}\exp\left\{j2\pi\frac{n}{16}\right\}$

3- La IDFT di $j8\delta_{k+1}$ è $\frac{j}{2}\exp\left\{-j2\pi\frac{n}{16}\right\}$

Dunque: $x_n = 1 + \sin\left(2\pi\frac{n}{16}\right)$

b - L'espressione della DFT del segnale $y_n = x_n - 2$

$$Y_k = -16\delta_k - j8\delta_{k-1} + j8\delta_{k-15}$$

c - L'espressione della DFT del segnale $y_n = x_n - 2\delta_n$

$$Y_k = 16\delta_k - j8\delta_{k-1} + j8\delta_{k-15} - 2$$

<u>ESERCIZIO 3</u>

a – Per il calcolo del valor medio e varianza del processo casuale $y_n = 3x_n + x_{n-1}$ si può procedere direttamente dalla definizione oppure vedere il processo y_n come risultato della convoluzione tra x_n e $h_n = 3\delta_n + \delta_{n-1}$

$$m_y = E[y_n] = E[3x_n + x_{n-1}] = E[3x_n] + E[x_{n-1}] = 4m_x = 8$$

$$E[y_n^2] = E[(3x_n + x_{n-1})^2] = E[9x_n^2] + E[x_{n-1}^2] + E[6x_n x_{n-1}] = 10R_x[0] + 6R_x[1]$$

$$R_x[m] = C_x[m] + m_x^2 = \frac{1}{5}\delta_{m+1} + \delta_m + \frac{1}{5}\delta_{m-1} + 4$$

$$\sigma_y^2 = E[y_n^2] - m_x^2 = 10R_x[0] + 6R_x[1] - 4 = 50 + 6\left(4 + \frac{1}{5}\right) - 4 = \frac{356}{5} = 71.2$$

b - La densita'di probabilita' delle ampiezze del processo casuale y_n è ancora gaussiana con valor medio 4 e varianza 71.2.

c - La cross-correlazione tra i processi casuale y_n e x_n si può calcolare direttamente dalla definizione oppure vedere il processo y_n come risultato della convoluzione tra x_n e $h_n = 3\delta_n + \delta_{n-1}$

$$R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m = \left(\frac{1}{5}\delta_{m+1} + \delta_m + \frac{1}{5}\delta_{m-1} + 4\right) * (3\delta_m + \delta_{m-1}) =$$
$$= 16 + \frac{3}{5}\delta_{m+1} + \frac{16}{5}\delta_m + \frac{8}{5}\delta_{m-1} + \frac{1}{5}\delta_{m-1}$$