TELECOMUNICAZIONI quarto appello (Prati) - 26 gennaio 2026

Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{sin(4\pi Bt)}{\pi t} 2 \cdot cos\left(2\pi Bt + \frac{\pi}{2}\right)$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza *H(f).*

b- Si calcoli l'uscita del sistema quando all'ingresso si pone il segnale $x(t) = 1 + sin(4\pi Bt)$

ESERCIZIO 2

Il segnale $x(t) = exp\{j(2\pi t + \varphi)\}$ viene campionato idealmente a passo $T = \frac{2}{3}$, ottenendo la sequenza x_n.

a - Si tracci il grafico della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ della sequenza x_n.

b - Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata $\tilde{X}(\phi)$ della sequenza x_n.

c –Si scriva l'espressione della sequenza x_n e se ne calcoli la DFT dei primi 12 campioni.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale reale x_n gaussiano a valor medio unitario, con potenza $P_x = 4$ e autocovarianza $C_x[m] = B\delta_{m+1} + A\delta_m + B\delta_{m-1}$.

a - Si calcoli il valore di A

b - Si calcoli il valore di B sapendo che la potenza del processo casuale $y_n = x_n * \{\delta_n - \delta_{n-1} + \delta_{n-2} - \delta_{n-3}\}$ è $P_y = 12$.

c - Si calcoli la potenza del processo $v_n = x_n * \frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n}$

TELECOMUNICAZIONI quarto appello (Prati) - 26 gennaio 2026

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza è data dalla somma di due rettangoli di ampiezza unitaria, fase $\pm\frac{\pi}{2}$ e banda 4B centrati in B e –B. Dunque:

nella banda $-3B < f < -B \quad H(f) = -j$

nella banda $B < f < 3B \quad H(f) = +j$

nella banda $-B < f < B \quad H(f) = 2cos\frac{\pi}{2} = 0$

b – Il segnale $x(t) = 1 + sin(4\pi Bt)$ ha trasformata costituita da 3 impulsi a frequenza 0, 2B e -2B:

$$X(f) = \delta(f-1) + \frac{j}{2}\,\delta(f+2B) - \frac{j}{2}\,\delta(f-2B)$$

La trasformata dell'uscita è:

$$Y(f) = 0\delta(f) - j\frac{j}{2}\,\delta(f+2B) - j\frac{j}{2}\delta(f-2B) = \frac{1}{2}\,\delta(f+2B) + \frac{1}{2}\delta(f-2B)$$

L'uscita e':

$$y(t) = cos(4\pi Bt)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale *x(t)* e':

$$X(f) = e^{j\varphi}\delta(f-1)$$

La trasformata della sequenza x_n è:

$\tilde{X}(f) = \frac{3}{2}e^{j\varphi}\sum_k \delta\left(f - 1 - \frac{3}{2}k\right)$ che è periodica di periodo $\frac{3}{2}$.

Il suo grafico nell'intervallo di frequenze $\pm\frac{3}{4}$ è un impulso alla frequenza $-\frac{1}{2}$

$$\tilde{X}(f) = \frac{3}{2}e^{j\varphi}\delta\left(f + \frac{1}{2}\right)$$

b – In frequenza normalizzata abbiamo con un semplice cambio di variabile $\phi = \frac{2}{3}f$

$$\tilde{X}\left(\frac{3}{2}\phi\right) = \frac{3}{2}e^{j\varphi}\delta\left(\frac{3}{2}\phi + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{j\varphi}\delta\left(\frac{3}{2}\left\{\phi + \frac{1}{3}\right\}\right) = e^{j\varphi}\delta\left(\phi + \frac{1}{3}\right)$$

c – L'espressione della sequenza x_n è:

$$x_n = x(nT) = e^{j\varphi}exp\left\{j2\pi n\frac{2}{3}\right\} = e^{j\varphi}\ exp\left\{-j2\pi n\frac{1}{3}\right\} = e^{j\varphi}exp\left\{-j2\pi n\frac{4}{12}\right\}$$

Ricordando che l'espressione della DFT della costante $e^{j\varphi}$ moltiplicata per l'esponenziale complesso $exp\left\{-j2\pi n\frac{k_o}{N}\right\}$ è data dalla DFT della costante ($12e^{j\varphi}\delta_k$) traslata di k_o (-4 in questo caso), si ottiene:

$X_k = 12e^{j\varphi}\delta_{k+4} = 12e^{j\varphi}\delta_{k-8}$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema: $R_x[m] = C_x[m] + 1$.

La potenza e': $P_x = R_x[0] = A + 1 = 4$ da cui, banalmente, $A = 3$.

b - I valori di B si trovano imponendo che la potenza di y_n sia uguale a 12. Passando per la formula generale dell'autocorrelazione di un sistema LTI $R_y[m]$, calcolata in $m = 0$, si ottiene:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = R_x[m] * \{4\delta_n - 3\delta_{n\pm1} + 2\delta_{n\pm2} - \delta_{n\pm3}\}$$

Inoltre, dato che il valor medio di y_n è nullo

$$R_y[m] = (B\delta_{m+1} + 3\delta_m + B\delta_{m-1}) * \{4\delta_n - 3\delta_{n\pm1} + 2\delta_{n\pm2} - \delta_{n\pm3}\}$$

Da qui

$$P_y = R_y[0] = 12 - 6B$$

e quindi $B = 0$.

c - Il processo x_n è dunque bianco e la sua densità spettrale di potenza è

$$S_x(\phi) = \delta(\phi) + 3rect(\phi)$$

$$S_v(\phi) = S_x(\phi)|H(\phi)|^2 = \delta(\phi) + 3rect(2\phi)$$

e quindi $P_v = 1 + \frac{3}{2} = 2.5$