SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 23 Settembre 2014

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Dato il generico segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(f)$ costante unitaria nella banda bilatera $-10 \leq f \leq 10$ Hz, si forma il segnale $y(t) = [x(t-\tau) + x(t+\tau)]$.

a [4]- Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier $Y(f)$.

b [3]- Il segnale $y(t)$ viene convoluto con il segnale $z(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T_o} + \varphi\right)$. Si calcoli l'espressione del segnale risultato della convoluzione.

c [3]- Si calcoli il valore del rapporto $\frac{\tau}{T_o}$ in corrispondenza del quale la potenza del segnale convoluto è minima.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale tempo-continuo $x(t)$ la cui trasformata di Fourier $X(f)$ ha le seguenti espressioni di parte reale ed immaginaria:

$$\mathrm{Re}\{X(f)\} = rect\left(f - \frac{1}{2}\right)\cos(4\pi f)$$

$$\mathrm{Im}\{X(f)\} = rect\left(f - \frac{1}{2}\right)\sin(4\pi f)$$

Il segnale $x(t)$ viene campionato a passo $T = 2$ ottenendo il segnale discreto x_n .

a [6]- Si calcoli l'espressione del segnale continuo $x(t)$ e del segnale discreto x_n .

b [4]- Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza sia in frequenza normalizzata.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ con densità di probabilità uniforme e potenza uguale alla varianza. Il coefficiente di correlazione diminuisce linearmente fino a diventare nullo dopo 10s. Il processo $x(t)$ viene campionato a passo $T = 4s$ ottenendo i campioni x_n .

a [5]- Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale x_n sapendo che il massimo valore dei campioni x_n è 6.

b [5]– Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze de processo casuale y_n ottenuto sottraendo al doppio di ogni campione di x_n una costante unitaria.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 23 Settembre 2014

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) La trasformata di Fourier del generico segnale $y(t) = x(t+\tau) + x(t-\tau)$ ha la seguente espressione:

$$Y(f) = 2X(f) \cdot \cos(2\pi f\tau)$$

Nel caso specifico abbiamo:

$$Y(f) = 2rect\left(\frac{f}{20}\right) \cdot \cos(2\pi f\tau)$$

b) La trasformata di $z(t)$ ha 2 impulsi alle frequenze $\pm\frac{1}{T_o}$. Nella convoluzione con $y(t)$, i 2 impulsi vengono moltiplicati per $2 \cdot \cos\left(2\pi\frac{\tau}{T_o}\right)$ se $\frac{1}{T_o} \leq 10$, mentre si annullano se $\frac{1}{T_o} > 10$.

Dunque il risultato della convoluzione è nullo se $\frac{1}{T_o} > 10$, altrimenti vale:

$$y(t) * z(t) = 2 \cdot \cos\left(2\pi\frac{\tau}{T_o}\right) \sin\left(2\pi\frac{t}{T_o} + \varphi\right) =$$

$$= \sin\left(2\pi\frac{t-\tau}{T_o} + \varphi\right) + \sin\left(2\pi\frac{t+\tau}{T_o} + \varphi\right)$$

c) Se $\frac{1}{T_o} \leq 10$, la potenza di $y(t) * z(t)$ è minima quando $\cos\left(2\pi\frac{\tau}{T_o}\right) = 0$. Cioè quando $\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$ (k intero).

ESERCIZIO 2

a – L'espressione di $X(f)$ può essere scritta nel modo seguente:

$$X(f) = rect\left(f - \frac{1}{2}\right)e^{j4\pi f}$$

Il segnale $x(t)$ ha la seguente espressione:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi(t+2))}{\pi(t+2)}e^{j\pi(t+2)}$$

Campionando a passo $T = 2$ si ottiene il seguente segnale discreto:

$$x_n = x(2n) = \frac{\sin(\pi(2n+2))}{\pi(2n+2)}e^{j\pi(2n+2)} = \frac{\sin(2\pi(n+1))}{2\pi(n+1)}e^{j2\pi(n+1)} = \delta_{n+1}$$

b – La trasformata di Fourier in frequenza normalizzata di $x_n = \delta_{n+1}$ è:

$X(\phi) = e^{j2\pi\phi}$ periodica di periodo 1

Passando da frequenza normalizzata a frequenza ($\phi = fT = 2f$) si ottiene:

$X(f) = e^{j4\pi f}$ periodica di periodo ½

Oppure si ragiona direttamente in frequenza.

Campionando s'introduce alias in frequenza e le repliche si sovrappongono per metà banda del rettangolo:

$\tilde{X}(f) = \frac{1}{2}e^{j4\pi f} + \frac{1}{2}e^{j4\pi\left(f+\frac{1}{2}\right)} = e^{j4\pi f}$ periodica di periodo ½

Passando da frequenza a frequenza normalizzata ($f = \frac{\phi}{T} = \frac{\phi}{2}$) si ottiene:

$\tilde{X}(\phi) = e^{j4\pi\frac{\phi}{2}} = e^{j2\pi\phi}$ periodica di periodo 1

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema si sa che:

$m_x = 0$ dato che la potenza è uguale alla varianza e che $\sigma_x^2 = P - |m_x|^2$

$\sigma_x^2 = P = 12$ dato che la distribuzione è uniforme tra -6 e +6 e che $\sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12}$

il coefficiente di correlazione del processo casuale campionato è:

$\rho_x[m] = \delta_m + 0.6\delta_{m+1} + 0.6\delta_{m-1} + 0.2\delta_{m+2} + 0.2\delta_{m-2}$ ottenuto campionando a 4s un triangolo di altezza unitaria tra -10s e +10s.

Quindi:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] + m_x^2 = 12\delta_m + 7.2\delta_{m+1} + 7.2\delta_{m-1} + 2.4\delta_{m+2} + 2.4\delta_{m-2}$$

$S_x(\phi) = 12 + 14.4\cos(2\pi\phi) + 4.8\cos(4\pi\phi)$ periodica di periodo 1

b – Il processo y_n sarà ancora uniforme con varianza quadrupla rispetto a x_n e valor medio uguale a -1.

Dunque: $\sigma_y^2 = \frac{\Delta_y^2}{12} = 24$ e $\Delta_y = 12\sqrt{2}$

La densità di probabilità delle ampiezze varrà $\frac{1}{12\sqrt{2}}$ nell'intervallo tra $-6\sqrt{2} - 1$ e $6\sqrt{2} - 1$