SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 9 Gennaio 2019

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left(\frac{\sin \pi B t}{\pi t} \right)^2 \cdot \frac{2}{B} \cdot \cos\left(2\pi \frac{B}{2} t \right)$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza del sistema dato.

b- Si trovi l'espressione dell'uscita *y(t)* quando all'ingresso del sistema si pone il segnale $x(t) = \frac{\sin \pi B t}{\pi t}$

c- L'uscita *y(t)* trovata al punto precedente viene campionata con frequenza di campionamento $f_s = B$, ottenendo la sequenza y_n. Si calcoli la DFT dei primi 50 campioni (da *n=0* a *n=49*) del segnale y_n.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)$ cosinusoide di ampiezza unitaria, frequenza $50Hz$ e fase iniziale di 30 gradi.

a – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 75Hz$. Trovare l'espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n sia in frequenza $\widetilde{X}(f)$ che in frequenza normalizzata $\widetilde{X}(\phi)$.

b –Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n. I campioni del processo casuale sono tra loro indipendenti e possono valere solo A o B con uguale probabilità.

a –Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione di x_n.

b – Si calcoli l'espressione dell'autocorrelazione della somma di 2 campioni consecutivi di x_n.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 9 Gennaio 2019

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza è formata dalla somma di due triangoli di banda bilatera 2B di ampiezza unitaria, traslati rispettivamente di B/2 a destra e a sinistra. Il risultato della somma è mostrato in colore nella figura 1.

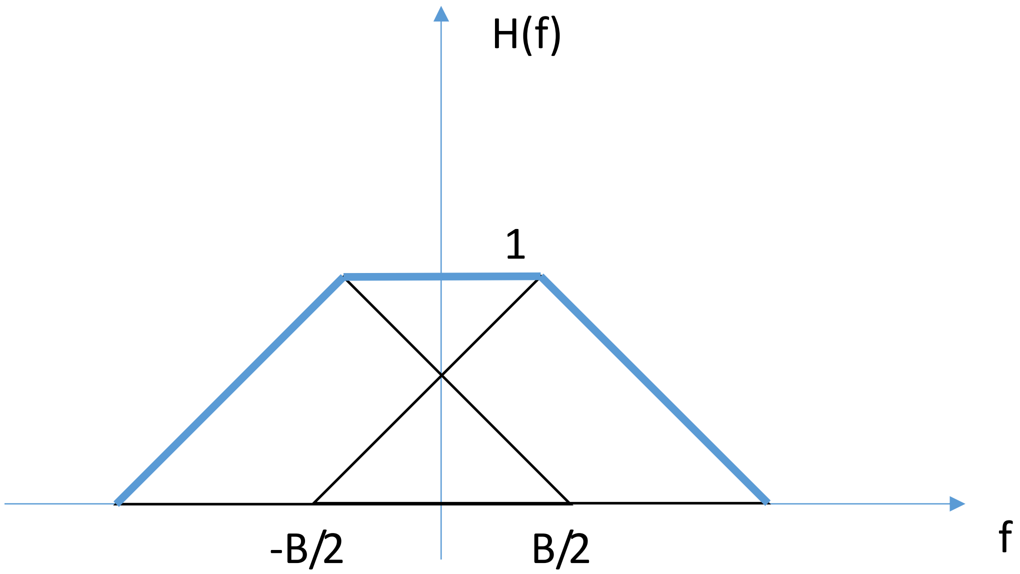

Figura 1 – Grafico della risposta in frequenza del sistema dato (linea spessa è la somma dei 2 triangoli)

b –La trasformata di Fourier dell'ingresso vale:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = X(f)H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t) = \frac{\sin \pi Bt}{\pi t}$$

c – Campionando l'uscita a passo $T=\frac{1}{B}$ si ottiene:

$$y_n = y(nT) = \frac{\sin \pi B \, n/B}{\pi \, n/B} = B\delta_n .$$

La DFT su 50 campioni vale $Y_k = B$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t)=\cos\left(2\pi 50t+\frac{\pi}{6}\right)$ è $X(f)=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}\delta(f-50)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta(f+50)$.
Campionando il segnale con $f_s = 75Hz$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier ha la seguente espressione:

$$\tilde{X}(f)=75\sum_k X(f-k\cdot 75)=75\sum_k \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}\delta(f-50-k\cdot 75)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta(f+50-k\cdot 75)$$

All'interno della banda compresa tra $-\frac{f_s}{2}$ e $+\frac{f_s}{2}$ (cioè tra $-35\,\text{Hz}$ e $+35\,\text{Hz}$) la trasformata ha la seguente espressione:

$$\tilde{X}(f)=\frac{75}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}\delta(f+25)+\frac{75}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta(f-25) \quad \text{periodica di periodo } 75$$

Passando alla frequenza normalizzata $\phi=\frac{f}{f_s}$, si ottiene

$$\tilde{X}(\phi)=\frac{75}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}\delta(f_s\phi+25)+\frac{75}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta(f_s\phi-25)=$$

$$=\frac{75}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}\delta(75\phi+25)+\frac{75}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta(75\phi-25)= \qquad \text{periodica di periodo 1.}$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}\delta\left(\phi+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta\left(\phi-\frac{1}{3}\right)$$

c – Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando un solo periodo di $\widetilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s}$.
Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{6}} \delta(f + 25) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} \delta(f - 25)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t) = \cos\left(2\pi 25t - \frac{\pi}{6}\right)$

ESERCIZIO 3

a – In generale, l'autocorrelazione di un processo stazionario discreto i cui campioni sono tra di loro indipendenti, ha la seguente espressione:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + m_x^2 \ .$$

Nel caso del processo dato il valor medio e la varianza valgono:

$$m_x = AP_x(A) + BP_x(B) = \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - m_x^2 = A^2 P_x(A) + B^2 P_x(B) - \frac{(A+B)^2}{4} = \frac{A^2 + B^2}{2} - \frac{(A+B)^2}{4} = \frac{(A-B)^2}{4}$$

Da cui

$$R_x[m] = \frac{(A-B)^2}{4} \delta_m + \frac{(A+B)^2}{4}$$

b – Il valor medio della somma di 2 campioni di x_n è ovviamente il doppio di m_x.
$m_y = A + B$
L'autocorrelazione si può calcolare come:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\sigma_x^2 \delta_m + m_x^2\right) * \left(2\delta_m + \delta_{m-1} + \delta_{m+1}\right) = \sigma_x^2 \left(2\delta_m + \delta_{m-1} + \delta_{m+1}\right) + 4m_x^2 =$$

$$=$$

$$= \frac{(A-B)^2}{4} \left(2\delta_m + \delta_{m-1} + \delta_{m+1}\right) + (A+B)^2$$