Segnali per le comunicazioni – Primo Appello del 27/6/2024

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left[\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\right]^2 2\pi \cdot \cos(\pi Bt + \alpha)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si scriva l'espressione analitica di $H(f)$ nella banda $-\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2}$ *(consiglio di disegnare* $separatamente\ i\ termini\ che\ compongono\ H(f)$ *nella banda* $-\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2}$*)*

C) Si ponga $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Quale proprietà della Trasformata di Fourier conviene utilizzare per il calcolo della seguente convoluzione: $y(t) = h(t) * \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$?

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{2\sin^2(4\pi t)}{\pi t}$ con frequenza di campionamento $f_s = 6$.

A) Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale x_n.

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

C) Si trovi l'espressione della DFT dei primi 10 campioni di $y_n = x_R(n)$

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario continuo gaussiano con varianza unitaria. I valori del processo diventano indipendenti e si mantengono tali dopo 10 millisecondi. Dopo tale valore l'autocorrelazione del processo rimane costante a 4.

A) Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo discreto x_n ottenuto campionando il processo dato con frequenza di campionamento $f_s = 20$Hz.

B) Il processo x_n viene filtrato con la risposta in frequenza $H(f) = 1 - 3e^{-j2\pi f} + 2\cos 4\pi f$ ottenendo il processo y. Si trovi la potenza di y_n.

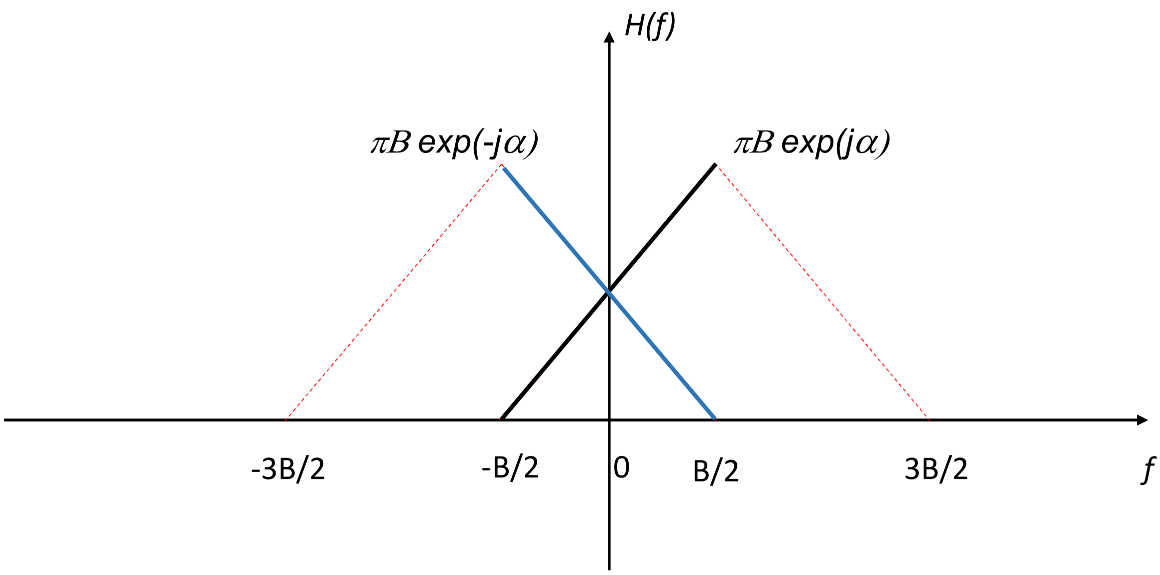
C) Il processo z_n si ottiene ponendo a 2 tutti i valori positivi di y_n e a -1 tutti quelli negativi. Quanto vale la varianza di z_n ?

Soluzione Esercizio 1 del 27/6/2024

A) La trasformata di Fourier di $h(t) = \left[\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}\right]^2 2\pi \cdot \cos(\pi Bt + \alpha)$ ha la seguente espressione:

$H(f) = \pi B e^{-j}\ tri\left(\frac{f}{B} + \frac{1}{2}\right) + \pi B e^{j\alpha} tri\left(\frac{f}{B} - \frac{1}{2}\right)$

B) I termini che compongono $H(f)$ nella banda $-\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2}$ sono mostrati nel grafico seguente.



Dunque, nella banda $-\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2}$ abbiamo:

$$H(f) = \pi e^{-j\alpha}\left(-f + \frac{B}{2}\right) + \pi e^{j\alpha}\left(f + \frac{B}{2}\right)$$

Riscrivendo meglio abbiamo:

$$H(f) = \pi f\left(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\right) + \pi\frac{B}{2}\left(e^{j\alpha} + e^{-j}\ \right) = j2\pi f \sin(\alpha) + \pi B \cos(\alpha)$$

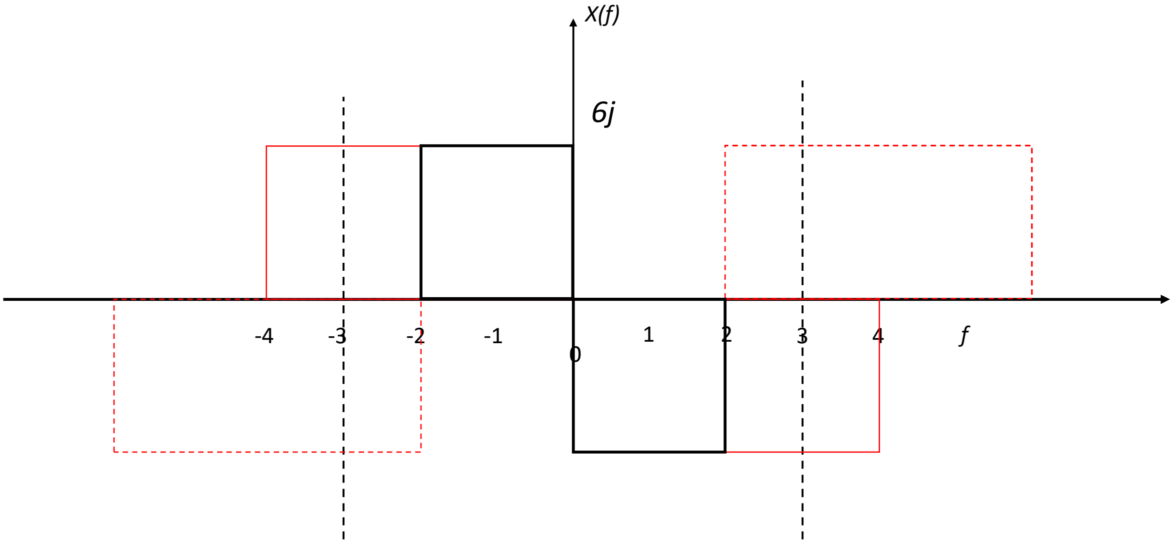
C) Posto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ l'espressione di $H(f)$ nella banda $-\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2}$ è $H(f) = j2\pi f$. Dunque l'uscita del sistema LTI sarà la derivata prima di $\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$.

Soluzione Esercizio 2 del 4/6/2024

A) La trasformata di $x(t) = \frac{2\,\mathrm{si}\ ^2(4\pi t)}{\pi t} = 2\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}\sin(4\pi t)$ è:

$$X(f) = j \cdot rect\left(\frac{f+2}{4}\right) - j \cdot rect\left(\frac{f-2}{4}\right)$$

Con la frequenza di campionamento $f_s = 6$ si introduce alias e si ottiene la seguente trasformata (periodica di periodo 6) del segnale discreto:



B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = j \cdot rect\left(\frac{f+1}{2}\right) - j \cdot rect\left(\frac{f-1}{2}\right)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{2\sin^2(2\pi t)}{\pi t}$$

C) L'espressione di $y_n = x_R(2n)$ è:

$$y_n = \frac{2\sin^2(2\pi n)}{\pi n} = 0$$

La DFT su 10 campioni è $Y_k = 0$

Soluzione Esercizio 3 del 4/6/2024

A) Dai dati del problema il tempo di decorrelazione è 1/100 di secondo e il modulo del valor medio del processo è 2.

$$m_x = \pm 2$$

$$\sigma_x^2 = 1$$

Campionando il processo con T=1/20 di secondo (più grande del tempo di decorrelazione) i campioni del processo x_n sono tra loro indipendenti e l'autocorrelazione vale:

$$R_x[m] = \delta_m + 4$$

B) La risposta in frequenza $H(f) = 1 - 3e^{-j2\pi f} + 2\cos 4\pi f$ è la trasformata della risposta all'impulso $h_m = \delta_m - 3\delta_{m-1} + \delta_{m+2} + \delta_{m-2}$.

La potenza dell'uscita è data dalla sua varianza dato che il suo valore medio $m_y = 0$. Tuttavia essendo i campioni di x_n tra loro indipendenti:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + 9\sigma_x^2 + \sigma_x^2 + \sigma_x^2 = 12$$

C) Dato che il valor medio $m_y = 0$ i valori positivi di y_n hanno la medesima probabilità di quelli negativi. Dunque:

$$f_z(a) = \frac{1}{2}\delta(a-2) + \frac{1}{2}\delta(a+1)$$

Il valor medio di z_n vale $m_z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Il valore quadratico medio vale $E[z_n^2] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

La varianza vale: $\sigma_z^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$