

## Segnali per le comunicazioni – Appello del 19/6/2025

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

### Esercizio 1

Sia consideri il segnale  $x(t) = \left[ \frac{\sin(\pi(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} \right]^2 \{1 - 2\cos(2\pi(t-\tau))\}$

**A )** Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza  $X(f)$

**B )** Si traccino i grafici di modulo e fase di  $X(f)$

**C )** Si trovi l'espressione del segnale:  $y(t) = x(t) * \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ .

### Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo  $x(t) = \frac{\sin(30\pi(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}$  con frequenza di campionamento  $f_s = 10$  ottenendo il segnale discreto  $x_n$ .

**A )** Si trovi l'espressione del segnale  $x_R(t)$  tempo continuo ricostruito dai campioni di  $x_n$ .

**B )** Si trovi l'espressione della DFT di  $x_n$  con  $\tau = 1$  e  $0 \leq n \leq 39$ .

### Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario reale  $x_n$  con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana con valor medio  $m_x = 0$  e varianza  $\sigma_x^2 = 4$ . Si sa inoltre che campioni a distanza maggiore di 1 sono tra di loro incorrelati.

**A** – Sapendo che la varianza di  $v = x_1 + x_2$  è  $\sigma_v^2 = 6$ , si trovi l'espressione di  $R_x[m]$ , autocorrelazione di  $x_n$ .

**B** – Il processo  $x_n$  viene filtrato con la seguente risposta in frequenza:  $H(f) = e^{-j2\pi f} + \cos 4\pi f$  ottenendo il processo discreto  $y_n$ . Si calcoli la Cross-correlazione uscita-ingresso  $R_{yx}[m]$ .

**C** – Tornando alla domanda del punto A, perché  $\sigma_v^2$  non può essere minore di 4?

## Soluzione Esercizio 1 del 19/6/2025

- A)**  $x(t) = \left[ \frac{\sin(\pi(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} \right]^2 \{1 - 2\cos(2\pi(t-\tau))\}$  può essere trasformato partendo da  $v(t) = \left[ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right]^2 \{1 - 2\cos(2\pi t)\}$ . Poi la trasformata di  $v(t)$  sarà moltiplicata per un esponenziale complesso a causa del cambio di variabile  $x(t) = v(t - \tau)$ .

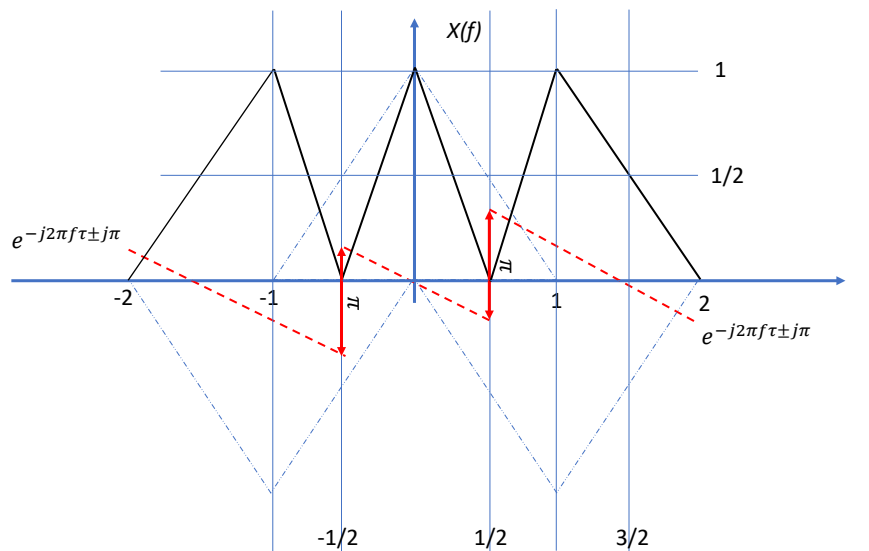
$$V(f) = \text{tri}(f) - \text{tri}(f - 1) - \text{tri}(f + 1) \text{ e quindi } X(f) = V(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

- B)**  $V(f)$  può utilmente essere scomposta nelle 3 bande

Nelle bande  $-2 < f < -1/2$  e  $1/2 < f < 2$ ,  $V(f) < 0$

Nella banda  $-1/2 \leq f \leq 1/2$   $V(f) \geq 0$

Dunque il grafico di modulo (linea continua) e fase (linea tratteggiata rossa) di  $X(f)$  è il seguente:



Nella figura sono riportate anche le 3 componenti triangolari di  $V(f)$ .

- C)**  $h(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$  ha come trasformata quindi  $H(f) = \text{rect}(f)$  da cui  $y(t) = 2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(t-\tau)\right)}{\pi(t-\tau)} \right]^2$ .

### Soluzione Esercizio 2 del 19/6/2025

**A)** La trasformata di  $x(t) = \frac{\sin(30\pi(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}$  è un rettangolo di banda bilatera 30 e fase lineare decrescente:

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{30}\right) e^{-j2\pi f\tau}$$

La trasformata del segnale ricostruito si ottiene replicando  $X(f)$  a passo  $f_s = 10$  e tenendo solo le componenti di frequenza nella banda  $-\frac{f_s}{2} \leq f < \frac{f_s}{2}$ :

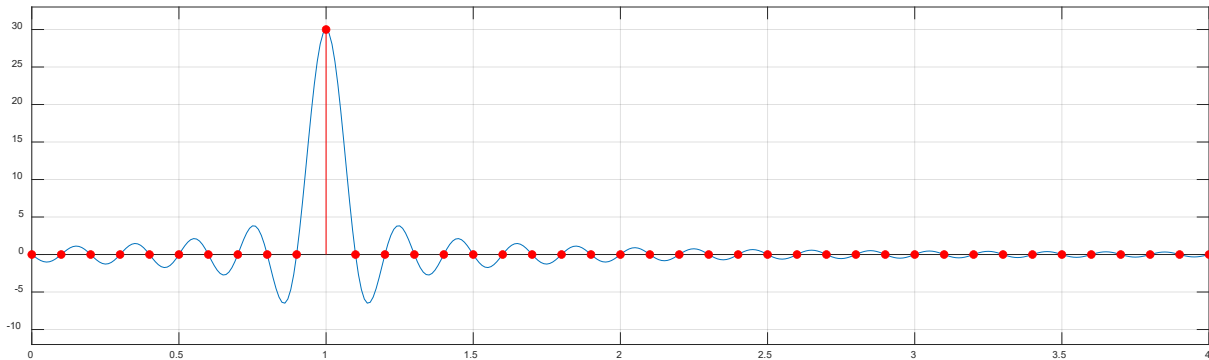
$$X_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{10}\right) e^{-j2\pi f\tau} + \text{rect}\left(\frac{f}{10}\right) e^{-j2\pi(f-10)\tau} + \text{rect}\left(\frac{f}{10}\right) e^{-j2\pi(f+10)\tau}$$

$$X_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{10}\right) [1 + 2 \cos 2\pi 10\tau] e^{-j2\pi f\tau}$$

Il segnale tempo-continuo ricostruito ha dunque la seguente espressione:

$$x_R(t) = [1 + 2 \cos 2\pi 10\tau] \frac{\sin(10\pi(t - \tau))}{\pi(t - \tau)}$$

Il grafico del segnale ricostruito  $x_R(t)$  e i campioni del segnale campionato  $x_n$  quando  $\tau = 1$  sono mostrati nella seguente figura.



**B)** L'espressione della DFT di  $x_n$  con  $0 \leq n \leq 39$  si calcola facilmente notando che per  $\tau = 1$  e  $T = 1/10$ , il segnale discreto ha la seguente espressione

$$x_n = x_R\left(\frac{n}{10}\right) = x_R(t) = 3 \frac{\sin\left(10\pi\left(\frac{n}{10} - 1\right)\right)}{\pi\left(\frac{n}{10} - 1\right)} = 30 \frac{\sin(\pi(n - 10))}{\pi(n - 10)} = 30\delta_{n-10}$$

La DFT di  $x_n$  è quindi una costante moltiplicata per un esponenziale complesso:

$$X_k = 30e^{-j\frac{2\pi 10k}{40}} \quad \text{con } 0 \leq k \leq 39$$

### Soluzione Esercizio 3 del 19/6/2025

**A** – Dai dati del problema  $\rho_x[m] = \delta_m + a\delta_{m+1} + a\delta_{m-1}$  e

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \rho_x[m] = 4\delta_m + 4a\delta_{m+1} + 4a\delta_{m-1}$$

Sapendo che la varianza di  $v = x_1 + x_2$  è  $\sigma_v^2 = 6$  e che il valor medio di  $v$  è nullo, abbiamo che

$$\sigma_y^2 = E[(x_1 + x_2)^2] = 6$$

Dunque  $2R_x[0] + 2R_x[1] = 8 + 8a = 6$ , da cui  $a = -\frac{1}{4}$  e

$$R_x[m] = 4\delta_m - \delta_{m+1} - \delta_{m-1}$$

**B** – Dato che  $H(f) = e^{-j2\pi f} + \cos 4\pi f$ , abbiamo che  $h_n = \delta_{n-1} + \frac{1}{2}\delta_{n+2} + \frac{1}{2}\delta_{n-2}$ .

La Cross-correlazione uscita-ingresso  $R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m$ .

$$R_{yx}[m] = -\frac{1}{2}\delta_{m+3} + 2\delta_{m+2} - \frac{1}{2}\delta_{m+1} - \delta_m + \frac{7}{2}\delta_{m-1} + \delta_{m-2} - \frac{1}{2}\delta_{m-3}$$

**C** – Tornando alla domanda del punto A, perché  $\sigma_y^2$  non potrebbe essere minore di 4?

La densità spettrale di potenza del processo  $x_n$  si calcola come trasformata di

$$R_x[m] = 4\delta_m + 4a\delta_{m+1} + 4a\delta_{m-1}$$

e vale  $S_x(f) = 4 + 8a \cos(2\pi f)$  con  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$

Il termine  $|8a| \leq 4$  onde evitare valori negativi di  $S_x(f)$  che è una densità spettrale di potenza e quindi mai negativa.

Ne segue che  $-4 \leq 8a \leq 4$  e quindi, essendo  $\sigma_y^2 = 8 + 8a$ ,  $4 \leq \sigma_y^2 \leq 12$ .