Segnali per le comunicazioni –Appello del 17/6/2022

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left[\frac{\sin[2\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}\right]^2 \cos\big(3\pi(t-3)\big)$

A) Si trovi l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si tracci il grafico del modulo e quello della fase di $H(f)$.

C) Si trovi l'espressione dell'uscita $y(t)$ all'ingresso $x(t) = \left[\frac{\sin[\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}\right]$

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]^2 \sin(\pi t)$ con intervallo di campionamento $T = \frac{1}{2}$

A) Si trovi l'espressione e si traccino i grafici (parte reale e immaginaria) della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ del segnale discreto x_n.

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

C) Si trovi l'espressione Y_k della DFT dei primi 50 campioni di $y_n = x_{2n} + 1$

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario tempo continuo con densità spettrale di potenza $S_x(f) = rect\left(\frac{f}{12}\right)$ e densità di probabilità delle ampiezze uniforme.

A) Si trovi l'espressione densità di probabilità delle ampiezze del processo.

B) Si formi il processo casuale discreto x_n ottenuto campionando $x(t)$ con $T = \frac{1}{72}$. Quanto vale la potenza di $y_n = x_{n+1} - x_{n-1}$?

C) La varianza del processo $x_n \cos(\pi n)$ è maggiore, minore o uguale a quella del processo x_n ?

<u>**Soluzione** Esercizio 1 del 17/6/2022</u>

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $H(f)$.

$$H(f) = e^{-i3\pi} tri\left(\frac{f-\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f-\frac{3}{2}\right)} + e^{i3\pi} tri\left(\frac{f+\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f+\frac{3}{2}\right)} =$$

$$= -tri\left(\frac{f-\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f-\frac{3}{2}\right)} - tri\left(\frac{f+\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f+\frac{3}{2}\right)}$$

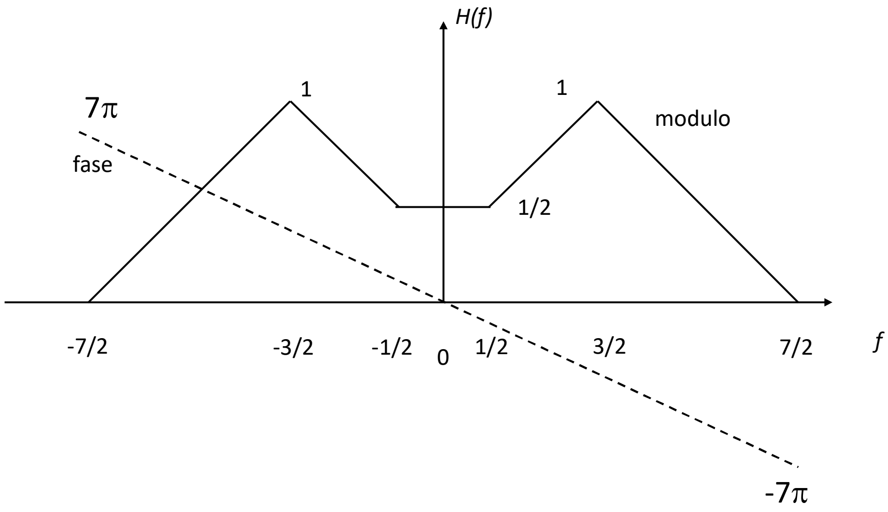
$$= tri\left(\frac{f-\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi f} + tri\left(\frac{f+\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi f}$$

Dove: $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

B) Per tracciare il grafico del modulo e quello della fase di $H(f)$ si noti che:

$$H(f) = \begin{cases} tri\left(\frac{f-\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi f} & \frac{1}{2} < f < \frac{7}{2} \\ tri\left(\frac{f+\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi f} & -\frac{7}{2} < f < -\frac{1}{2} \\ tri\left(\frac{f-\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi f} + tri\left(\frac{f+\frac{3}{2}}{2}\right) e^{-j2\pi f} & -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi nella banda $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$, $H(f) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi f}$ il cui modulo è $\frac{1}{2}$ e la fase $-2\pi f$.



C) $$Y(f) = X(f)H(f) = rect(f)e^{-j2\pi f}\,\frac{1}{2}\,e^{-j2\pi}$$

Da cui $$y(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[\pi(t-2)]}{\pi(t-2)}\right]$$

Soluzione Esercizio 2 del 17/6/2022

A) La trasformata di $x(t)$ è:

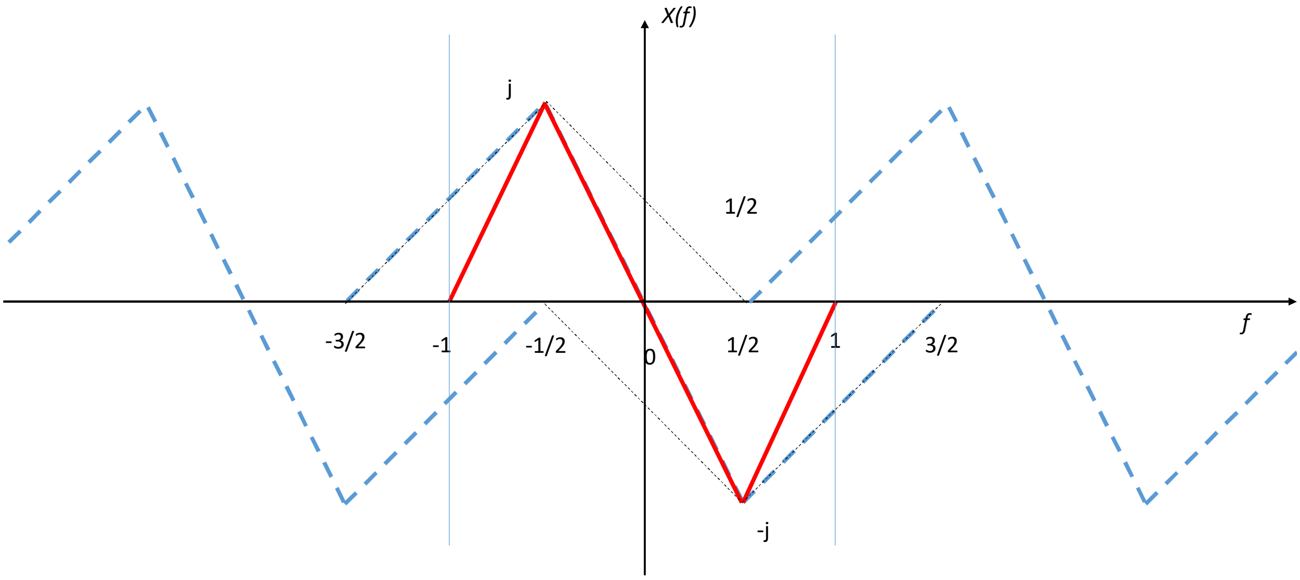
$$X(f) = -\frac{j}{2} tri\left(f - \frac{1}{2}\right) + \frac{j}{2} tri\left(f + \frac{1}{2}\right)$$

Dove $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

L'intervallo di campionamento $T = \frac{1}{2}$ $(f_s = 2)$ introduce alias:

In frequenza: $\tilde{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -j\ tri\left(f - \frac{1}{2} - 2k\right) + j\ tri\left(f + \frac{1}{2} - 2k\right)$

Il grafico di $\tilde{X}(f)$ è solo immaginario ed è riportato nella seguente figura (nella banda di frequenze $-1 \div 1$). Le linee tratteggiate spesse (azzurro) sono le repliche della trasformata $2X(f)$ mentre la linea piena spessa (rossa) è la trasformata $\tilde{X}(f)$ di periodo 2.



B) Dal grafico è facile vedere che la trasformata del segnale ricostruito è formata da due triangoli di banda 1, altezze $\pm\frac{j}{2}$, traslati di $f = \pm\frac{1}{2}$.

L'espressione del segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\pi t}\right]^2 \sin(\pi t)$$

C) E' immediato rendersi conto che $y_n = x_{2n} + 1 = 1$ in quanto $x_{2n} = x(n) = \left[\frac{\sin(\pi n)}{\pi n}\right]^2 \sin(\pi n) = 0$

La DFT dei primi 50 campioni di y_n è:

$$Y_k = 50\delta_k$$

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 3 del 17/6/2022</u>

A) La densità di probabilità delle ampiezze del processo x_n è uniforme nell'intervallo $-6 \div 6$ perché la varianza, integrale di $S_x(f) = rect\left(\frac{f}{12}\right)$, è $\sigma_x^2 = 12$, l'intervallo di valori della densità di probabilità delle ampiezze è $\Delta = \sqrt{12\sigma_x^2 = 12}$ e il valor medio è nullo (non c'è l'impulso a frequenza 0 nella $S_x(f)$).

Quindi $p_x(a) = \frac{1}{12} rect\left(\frac{a}{12}\right)$

B) La potenza di $y_n = x_{n+1} - x_{n-1}$ è:

$$P_y = E[y_n^2] = 2R_x[0] - 2R_x[2]$$

$$R_x[m] = 72 \frac{\sin \pi \frac{m}{6}}{\pi m}$$

Da cui

$$P_y = 2 \cdot 12 - 2 \cdot 72 \frac{\sqrt{3}/_2}{2\pi} \cong 4.15$$

C) La varianza del processo $x_n \cos(\pi n)$ è uguale a quella del processo x_n. I campioni di posizione dispari di x_n cambiano di segno, ma la dispersione media rispetto al valor medio nullo rimane identica. Non sarebbe così se il valor medio delle ampiezze fosse diverso da zero.