Segnali per le comunicazioni –Appello del 14/6/2023

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin(2\pi B(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} \cos(\pi B t)$

A) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$ quando $\tau = \frac{1}{4B}$

B) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = x(t) * \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t}$ con τ qualsiasi.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]^2 \cos\left(18\pi\left(t - \frac{1}{36}\right)\right)$ con frequenza di campionamento $f_s = 4$.

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata del segnale x_n.

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

C) Si trovi l'espressione analitica del segnale $y(t) = x_R(t) * z(t)$ dove $z(t)$ è un segnale con banda limitata tra -1 e 1.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana e autocorrelazione $R_x(\tau) = 2 - \left|\frac{\tau}{4}\right|$ per $|\tau| \leq 4$ e costante unitaria per $|\tau| > 4$.

A) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo dato.

B) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale $y(t) = x(t) - x(t-3)$

C) Il processo $y(t)$ viene campionato a passo $T = 3$, ottenendo il processo discreto y_n. Quanto vale la potenza della media aritmetica di 3 campioni consecutivi di y_n?

Soluzione Esercizio 1 del 14/6/2023

A) $$X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{2B} - \frac{1}{2}\right) e^{-i2\pi\left(f - \frac{B}{2}\right)\tau} + \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{B} + \frac{1}{2}\right) e^{-i2\pi\left(f + \frac{B}{2}\right)\tau}$$

Nelle bande $-\frac{3}{2}B < f < -\frac{1}{2}B$ e $\frac{1}{2}B < f < \frac{3}{2}B$, non ci sono sovrapposizioni in frequenza e le trasformate sono rispettivamente:

$X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{B} + \frac{1}{2}\right) e^{-i2\pi\left(f + \frac{B}{2}\right)\tau}$ e $X(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{2B} - \frac{1}{2}\right) e^{-i2\pi\left(f - \frac{B}{2}\right)\tau}$

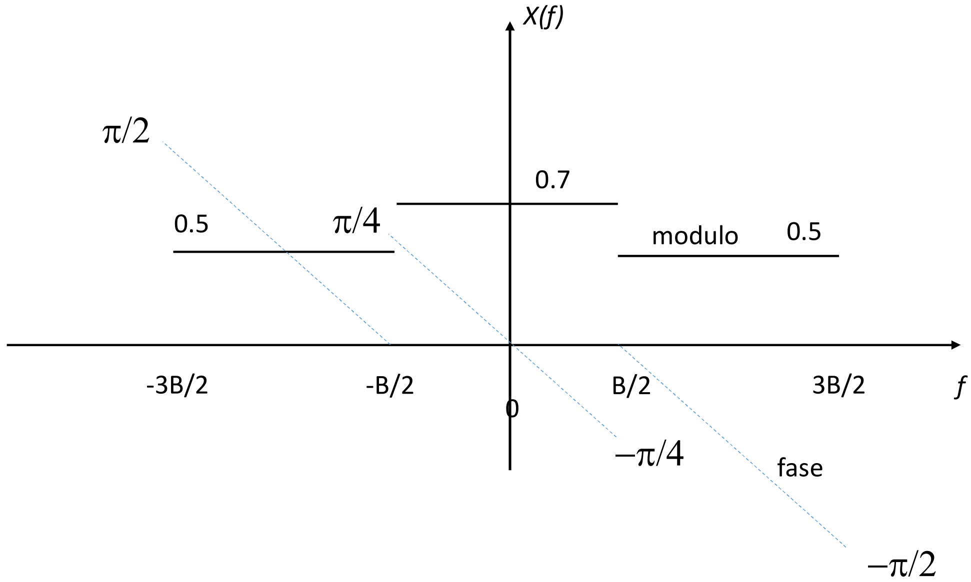
Nella banda $-\frac{1}{2}B \leq f \leq \frac{1}{2}B$, la trasformata vale:

$$X(f) = \frac{1}{2} e^{-i2\pi\left(f - \frac{B}{2}\right)\tau} + \frac{1}{2} e^{-i2\pi\left(f + \frac{B}{2}\right)\tau} = e^{-i2\pi} \quad \cos\left(2\pi \frac{B}{2} \tau\right)$$

Se $\tau = \frac{1}{4B}$

$$X(f) = e^{-i2\pi f \frac{1}{4B}} \cos\left(2\pi \frac{B}{2} \frac{1}{4B}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\pi f \frac{1}{2B}}$$

I grafici di modulo e fase sono dunque:



B) $$Y(f) = X(f)H(f) = e^{-i2\pi f} \quad \cos\left(2\pi \frac{B}{2} \tau\right) \cdot rect\left(\frac{f}{B}\right)$$ da cui

$$y(t) = \cos\left(2\pi \frac{B}{2} \tau\right) \frac{\sin(\pi B(t - \tau))}{\pi(t - \tau)}$$

Soluzione Esercizio 2 del 14/6/2023

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{j}{2} tri(f+9) - \frac{j}{2} tri(f-9)$$

Dove: $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

La frequenza di campionamento $f_s = 4$ introduce alias:

$\tilde{X}(f) = 2jtri(f+1) - 2jtri(f-1)$ di periodo 4

E ponendo $f = 4\varphi$

$\tilde{X}(\varphi) = 2jtri(4\varphi+1) - 2jtri(4\varphi-1)$ di periodo 1

B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = \frac{j}{2} tri(f+1) - \frac{j}{2} tri(f-1)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]^2 \sin(2\pi t)$$

C) La trasformata di Fourier di $y(t) = x_R(t) * z(t)$ è:

$$Y(f) = -\frac{j}{2} f Z(f) = -j2\pi f \frac{1}{4\pi} Z(f)$$

Anti-trasformando si ottiene:

$$y(t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{dz(t)}{dt}$$

Soluzione Esercizio 3 del 14/6/2023

A) L'autocorrelazione del processo dato è: $R_x(\tau) = tri\left(\frac{\tau}{4}\right) + 1$.

Dove $tri(\tau)$ è un triangolo tra -1 e 1 alto 1

La densità spettrale di potenza è la sua trasformata di Fourier:

$$S_x(f) = \delta(f) + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(4\pi f)}{\pi f}\right]^2$$

B) $y(t) = x(t) - x(t-3) = x(t) * \big(\delta(t) - \delta(t-3)\big)$

Dunque

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * \big(2\delta(\tau) - \delta(\tau-3) - \delta(\tau+3)\big) = 2tri\left(\frac{\tau}{4}\right) - tri\left(\frac{\tau-3}{4}\right) - tri\left(\frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$S_y(f) = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(4\pi f)}{\pi f}\right]^2 (2 - 2\cos(6\pi f))$$

C) L'autocorrelazione del processo casuale y_n si ottiene campionando $R_y(\tau)$ a passo 3:

$R_y[m] = \frac{3}{2}\delta_m - \frac{1}{2}\delta_{m\pm1} - \frac{1}{4}\delta_{m\pm2}$. Il processo y_n è a valor medio nullo.

La potenza della media aritmetica è data dall'autocorrelazione di $z_n = \frac{1}{3}(y_n + y_{n-1} + y_{n-2})$ calcolata in 0 oppure direttamente dal valore quadratico medio di z_n:

$P_z = E[z_n^2] = \frac{1}{9}(E[y_n^2] + E[y_{n-1}^2] + E[y_{n-2}^2] + 2E[y_n y_{n-1}] + 2E[y_n y_{n-2}] + 2E[y_{n-2} y_{n-1}])$

$P_z = E[z_n^2] = \frac{1}{9}\big(3R_y[0] + 4R_y[1] + 2R_y[2]\big) = \frac{1}{9}\left(3\frac{3}{2} - 4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{9}$

Attraverso la

$R_z[m] = \left(\frac{3}{2}\delta_m - \frac{1}{2}\delta_{m\pm1} - \frac{1}{4}\delta_{m\pm2}\right) * \left(\frac{1}{3}\delta_m - \frac{2}{9}\delta_{m\mp1} - \frac{1}{9}\delta_{m\mp2}\right)$ calcolato solo in m=0

$$R_z[0] = \frac{2}{9}$$