SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Primo Appello – 6 Luglio 2016

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h e 15minuti.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right]^2 \cos(\pi(t+\tau))$.

a - Si calcoli l'espressione della risposta in frequenza $H(f)$ del segnale dato (*nella soluzione si utilizzi la seguente simbologia:* $tri(f) = rect(f) * rect(f)$)

b - Si calcoli la seguente convoluzione: $y(t) = h(t) * [1 + \cos(\pi t)]$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = 8\sin\left(\frac{3}{2}\pi Bt\right) + \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$.

a - Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{4}B$ Hz. Si traccino i grafici della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

b – Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato x_n.

c – Calcolare l'energia del segnale $x(t)$ dato e quella del segnale ricostruito $\hat{x}(t)$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo $x(t)$ con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana, bianco nella banda $-100 \le f \le 100$, con valor medio unitario, varianza unitaria.

a - Si calcoli l'espressione dell'autocorrelazione $R_x(\tau)$ e del coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau)$ del processo $x(t)$.

b – Il processo $x(t)$ viene fatto passare attraverso un derivatore. Quanto vale valor medio e varianza del processo $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$? [*Suggerimento: si esprima il derivatore come un operatore lineare tempo invariante nel dominio della frequenza ...]*

c – [Facoltativo] Sapendo che $x(t_o) = 3$, quale è la migliore predizione lineare del valore assunto dal processo $x(t)$ dopo $\frac{1}{400}$ s. cioè al tempo $t_1 = t_o + \frac{1}{400}$? Quanto vale la varianza della predizione?

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Primo Appello – 6 Luglio 2016

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di $h(t)=\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right]^2 \cos(\pi(t+\tau))$ si può calcolare a partire da quella di $\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right]^2$ che poi andrà moltiplicata per $\frac{1}{2}\exp\{\pm j\pi\tau\}$, traslata intorno alle frequenze $\pm\frac{1}{2}$ e sommata.

Detta $tri(f)=rect(f)*rect(f)$:

$$H(f)=\frac{1}{2}tri\left(f-\frac{1}{2}\right)\exp\{j\pi\tau\}+\frac{1}{2}tri\left(f+\frac{1}{2}\right)\exp\{-j\pi\tau\}$$

b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)=1+\cos(\pi t)$ è formata da 3 impulsi di area 1 alla frequenza nulla e di area ½ alle frequenze $f=\pm\frac{1}{2}$:

$$X(f)=\delta(f)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)$$

La trasformata dell'uscita è dunque:

$$\begin{aligned}
&Y(f)=X(f)H(f)=\\
&=\left[\frac{1}{2}tri\left(-\frac{1}{2}\right)\exp\{j\pi\tau\}+\frac{1}{2}tri\left(\frac{1}{2}\right)\exp\{-j\pi\tau\}\right]\delta(f)+\\
&+\left[\frac{1}{4}tri\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\exp\{j\pi\tau\}+\frac{1}{4}tri\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\exp\{-j\pi\tau\}\right]\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\\
&+\left[\frac{1}{4}tri\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\exp\{j\pi\tau\}+\frac{1}{2}tri\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\exp\{-j\pi\tau\}\right]\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\cos(\pi\tau)\delta(f)+\frac{1}{4}\exp\{j\pi\tau\}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\exp\{-j\pi\tau\}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Anti-trasformando si ottiene:

$$\begin{aligned}
&y(t)=\frac{1}{2}\cos(\pi\tau)+\frac{1}{4}\exp\{j\pi\tau\}\exp\{j\pi t\}+\frac{1}{4}\exp\{-j\pi\tau\}\exp\{-j\pi t\}=\\
&=\frac{1}{2}\cos(\pi\tau)+\frac{1}{2}\cos(\pi(t+\tau))
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

a – La banda bilatera del seno cardinale è B quindi la minima frequenza di campionamento è maggiore di B.

La frequenza di campionamento utilizzata $f_s = \frac{3}{4}B$ Hz introduce alias.

La trasformata del segnale tempo continuo $x(t) = 8\sin\left(\frac{3}{2}\pi Bt\right) + \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$ è:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right) + j4\delta\left(f + \frac{3}{4}B\right) - j4\delta\left(f - \frac{3}{4}B\right)$$

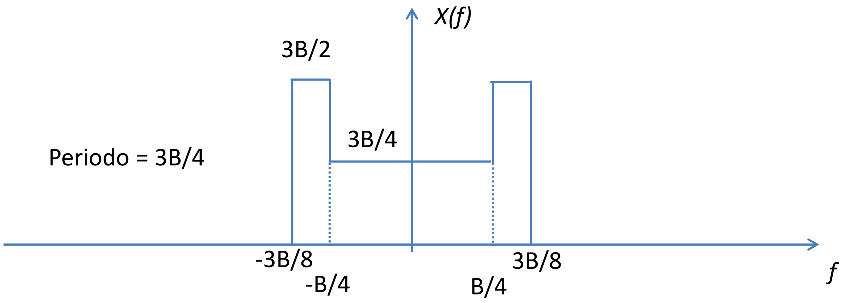
Quella del segnale discreto campionato con $f_s = \frac{3}{4}B$ Hz vale (teorema del campionamento):

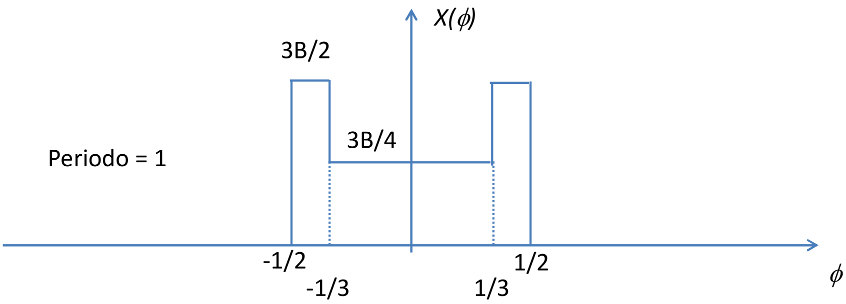
$\widetilde{X}(f) = \frac{3}{4}B\sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{1}{B}\left(f - k\frac{3}{4}B\right)\right)$ gli impulsi si replicano a frequenza zero con segno opposto e si annullano.

Passando alla frequenza normalizzata $f = \frac{\phi}{T} = \phi\frac{3}{4}B$

$$\widetilde{X}(\phi) = \frac{3}{4}B\sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{1}{B}\left(\phi\frac{3}{4}B - k\frac{3}{4}B\right)\right) = \frac{3}{4}B\sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{3}{4}(\phi - k)\right)$$

Graficamente il risultato della ripetizione periodica e della moltiplicazione sono illustrati nelle seguenti figure sia in frequenza che in frequenza normalizzata.





b – Il segnale ricostruito tramite filtro di ricostruzione ideale passa-basso nella banda $f = \pm\frac{3}{8}B$ Hz con ampiezza $T = \frac{4}{3B}$ vale:

$$\hat{x}(t) = \frac{\sin\left(\pi\frac{B}{2}t\right)}{\pi t} + 4\frac{\sin\left(\pi\frac{B}{8}t\right)}{\pi t}\cos\left(2\pi\frac{5}{16}Bt\right)$$

c – L'energia di $x(t)=8\sin\left(\frac{3}{2}\pi Bt\right)+\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t}$ che contiene una componente periodica è infinita, mentre l'energia di $\hat{x}(t)$ vale $\frac{3}{2}B$

ESERCIZIO 3

a – Il processo casuale $x(t)$ ha densità spettrale di potenza data dalla seguente espressione:

$$S_x(f)=\frac{1}{200}rect\left(\frac{f}{200}\right)+\delta(f)$$

L'autocorrelazione ha dunque la seguente espressione:

$$R_x(\tau)=\frac{1}{200}\frac{\sin\pi 200\tau}{\pi\tau}+1$$

Il coefficiente di correlazione del processo vale: $\rho_x(\tau)=\frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}=\frac{R_x(\tau)-1}{\sigma_x^2}=\frac{\sin\pi 200\tau}{\pi 200\tau}$

b – Il processo casuale $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ può essere convenientemente visto come il processo $x(t)$ filtrato con il sistema lineare tempo invariante con risposta in frequenza $H(f)=j2\pi f$

Il valor medio di $y(t)$ è quindi nullo dato che: $m_y=m_xH(0)=0$.
La varianza di $y(t)$ coincide con la sua potenza dato che il valor medio è nullo.
La potenza di $y(t)$ si calcola integrando la densità spettrale di potenza che vale:

$$S_y(f)=S_x(f)|H(f)|^2=\frac{1}{200}rect\left(\frac{f}{200}\right)4\pi^2f^2$$

$$\sigma_y^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_y(f)df=\frac{1}{200}\int_{-100}^{100}4\pi^2f^2df=\frac{4}{200}\pi^2\left.\frac{f^3}{3}\right|_{-100}^{100}=\frac{\pi^2}{75}10^6$$

c – La predizione lineare di $x(t_1)$ dato $x(t_o)$ è: $\hat{x}(t_1)=\rho_x(t_1-t_o)x(t_o)$
La varianza della predizione è: $\sigma_{\hat{x}(t_1)}^2=\sigma_x^2\left[1-\rho_x^2(t_1-t_o)\right]$

Ponendo $t_1-t_o=\frac{1}{400}$, $x(t_o)=3$, $\sigma_x^2=1$ e utilizzando l'espressione del coefficiente di correlazione trovato al punto ***a***, si ottiene quindi:

$$\rho_x(t_1-t_o)=\frac{\sin\pi 200\frac{1}{400}}{\pi 200\frac{1}{400}}=2\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$$\hat{x}(t_1)=\frac{6}{\pi} \quad \text{e} \quad \sigma_{\hat{x}(t_1)}^2=\left[1-\frac{4}{\pi^2}\right]$$