Segnali per le comunicazioni –Appello del 24/6/2021

Esercizio 1 da svolgere in 35 minuti

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin\left(4\pi\left(t-{}^{1}/_{6}\right)\right)}{\pi\left(t-{}^{1}/_{6}\right)}$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

B) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 3$ ottenendo il segnale discreto x_n. Si scriva l'espressione della trasformata $X_R(f)$ del segnale tempo-continuo ricostruito e si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$.

(Anche se non è richiesto, può essere di aiuto tracciare il grafico della trasformata $X_R(f)$ prima di calcolare $x_R(t)$)

Soluzione Esercizio 1 del 24/6/2021

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin\left(4\pi B(t-{}^1/_6)\right)}{\pi(t-{}^1/_6)}$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right)e^{-i2\pi f\frac{1}{6}}$$

$X(f)$ è complessa con modulo unitario nella banda $-2 < f < 2$ e fase lineare $-2\pi f\frac{1}{6}$

B) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 3$ ottenendo il segnale discreto x_n. Il campionamento introduce alias. La trasformata di Fourier $X_R(f)$ del segnale ricostruito

si calcola nella banda $-\frac{3}{2} \leq f \leq \frac{3}{2}$ dove vale:

$$X_R(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right)e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} + rect\left(\frac{f-3}{4}\right)e^{-i2\pi(f-3)\frac{1}{6}} + rect\left(\frac{f+3}{4}\right)e^{-i2\pi(f+3)\frac{1}{6}}$$

Dunque (aiutandosi con il grafico) si ottiene:

$$X_R(f) = \begin{cases} e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} & -1 < f < 1 \\ e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} + e^{-i2\pi(f-3)\frac{1}{6}} = e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} - e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} = 0 & 1 \leq f \leq \frac{3}{2} \\ e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} + e^{-i2\pi(f+3)\frac{1}{6}} = e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} - e^{-i2\pi f\frac{1}{6}} = 0 & -\frac{3}{2} < f < -1 \end{cases}$$

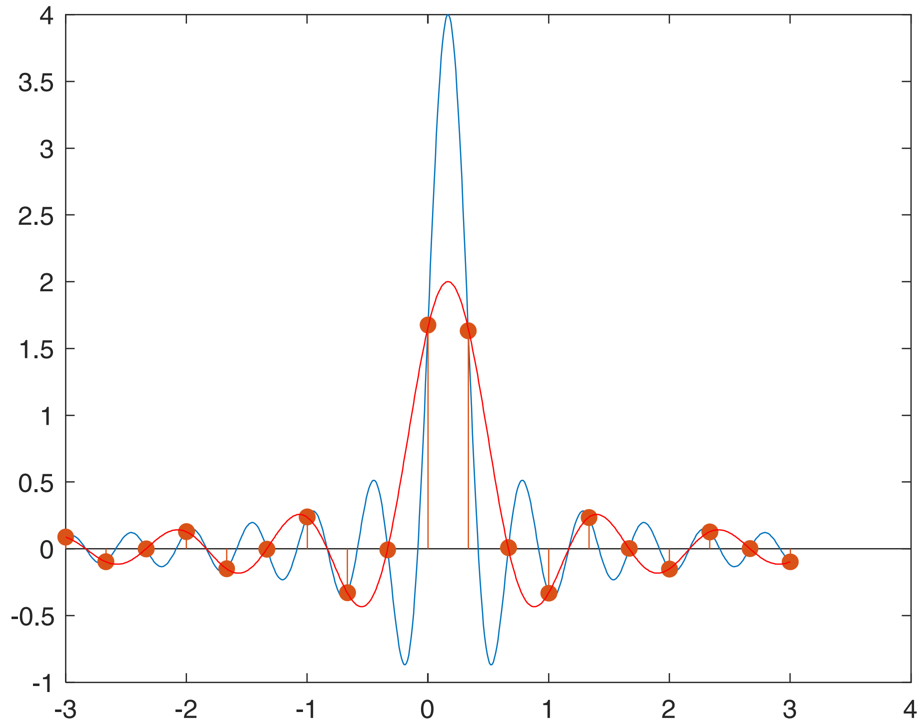
In altri termini la somma dei valori complessi si annulla nelle bande $1 \leq f \leq \frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2} < f < -1$ e vale $e^{-i2\pi f\frac{1}{6}}$ nella banda $-1 < f < 1$. *(ATTENZIONE: il modulo della somma di valori complessi è diverso dalla somma dei moduli !!!).*

Da qui è facile ricavare l'espressione del segnale ricostruito:

$$x_R(t) = \frac{\sin\left(2\pi(t-{}^1/_6)\right)}{\pi(t-{}^1/_6)}$$

Si può verificare che campionando $x_R(t)$ e l'originale $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 3$ si ottengono gli stessi campioni x_n . Infatti

$$\sin\left(2\pi\frac{n}{3} - {}^{\pi}/_{3}\right) = \sin\left(4\pi\frac{n}{3} - {}^{2\pi}/_{3}\right)$$



Segnali per le comunicazioni –Appello del 24/6/2021

Esercizio 2 da svolgere in 35 minuti

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario tempo continuo con densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)$ che è uniforme e compresa tra 6 e 8 e nulla altrove:

Il coefficiente di correlazione del processo vale $\rho_x(\tau) = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2$.

A) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo dato.

B) Il processo $x(t)$ viene campionato a passo T in modo da ottenere un processo discreto bianco x_n. Quale è il più piccolo valore di T che si può utilizzare per ottenere un processo discreto bianco?

C) Quanto vale la varianza di $x_n - 2x_{n-1}$?

D) I campioni di posizione pari del processo bianco x_n vengono cambiati di segno, ottenendo il processo y_n. Si può affermare senza far conti che la varianza del processo y_n è maggiore di quella del processo x_n? E la potenza?

Soluzione Esercizio 2 del 24/6/2021

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario tempo continuo con densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)$ che è uniforme e compresa tra 6 e 8 e nulla altrove:

Il coefficiente di correlazione del processo vale $\rho_x(\tau) = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2$.

A) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo dato. Questa, in generale, è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione del processo: $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) + m_x^2$

Il valor medio e la varianza del processo si calcolano dalla densità di probabilità delle ampiezze:

$$m_x = \int_6^8 \frac{a}{2} da = 7$$

$$\sigma_x^2 = \int_6^8 \frac{a^2}{2} da - m_x^2 = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$$

Da cui:

$$S_x(f) = \frac{1}{3} tri(f) + 49\delta(f)$$

B) Per ottenere un processo discreto bianco bisogna campionare il coefficiente di correlazione del segnale continuo per farlo diventare un impulso discreto. Quindi:

$$\rho_x(mT) = \left(\frac{\sin \pi mT}{\pi mT}\right)^2 = \delta_m$$

Che si ottiene per tutti i T interi. Il più piccolo intero è ovviamente 1.

C) Quanto vale la varianza di $x_n - 2x_{n-1}$? Dato che il processo è bianco, i suoi campioni sono incorrelati e la varianza della differenza è uguale alla somma delle varianze: $5\sigma_x^2 = \frac{5}{3}$

D) I campioni di posizione pari del processo bianco x_n vengono cambiati di segno, ottenendo il processo y_n. Si può affermare che la varianza del processo y_n è maggiore di quella del processo x_n ? E la potenza?

Si, la varianza del processo y_n è maggiore di quella del processo x_n perché la dispersione dei valori di y_n rispetto al suo valor medio (che ora è nullo) aumenta: infatti la nuova densità di probabilità delle ampiezze è simmetrica rispetto all'origine, costante tra 6 e 8 e tra -6 e -8 (*ATTENZIONE: non c'entra nulla la correlazione tra campioni, ma solo la densità di probabilità dei processi).* Ovviamente la potenza è la stessa perché il valore atteso del quadrato dei campioni non cambia nei due casi.