Segnali per le comunicazioni – PRE-Appello del 6/6/2022

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left[\frac{\sin[\pi(t-1)]}{\pi(t-1)}\right]^2 \cos(\pi t)$

A) Si trovi l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si trovi l'espressione dell'uscita $y(t)$ all'ingresso $x(t) = \cos(2\pi t)$

C) Si tracci il grafico del modulo e quello della fase di $H(f)$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = 2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi t + \theta)$ con intervallo di campionamento $T = \frac{1}{2}$

A) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

B) Si trovi l'espressione X_k della DFT dei primi 10 campioni di x_n

C) Si annulli il terzo campione della DFT appena calcolata ottenendo la nuova sequenza Y_k: qual è l'espressione del segnale y_n ottenuto dalla IDFT di Y_k?

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale x_n stazionario tempo discreto con densità spettrale di potenza $S_x(\varphi) = Brect\left(\frac{4}{3}\varphi\right) + A\delta(\varphi)$. La densità di probabilità delle ampiezze del processo x_n è uniforme nell'intervallo $-8 \div 4$.

A) Si trovino i valori di *A* e *B*

B) Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione del processo casuale $y_n = x_n * \frac{\sin \pi \frac{n}{10}}{\pi n}$

C) Si trovi la potenza del processo casuale $z_n = y_{n+8} + y_{n-2} + y_{n-12}$

Soluzione Esercizio 1 del 6/6/2022

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $H(f)$.

$$H(f) = \frac{1}{2} tri\left(f - \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} tri\left(f + \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f+\frac{1}{2}\right)}$$

Dove: $tri(f) = rect(f) * rect(f)$

B) $Y(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{8} e^{j\pi}\delta(f+1) + \frac{1}{8} e^{-j\pi}\delta(f-1)$

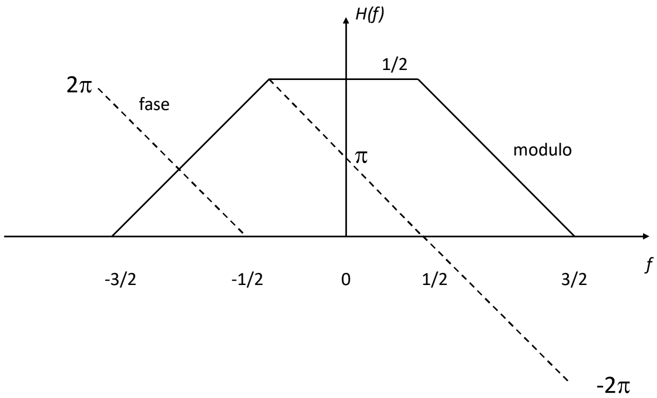
Da cui $y(t) = \frac{1}{4}\cos(2\pi t - \pi) = -\frac{1}{4}\cos(2\pi t)$

C) Per tracciare il grafico del modulo e quello della fase di $H(f)$ si noti che:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} tri\left(f + \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f+\frac{1}{2}\right)} & -\frac{3}{2} < f < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} tri\left(f - \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi\left(f-\frac{1}{2}\right)} & \frac{1}{2} < f < \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}\left(f + \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi f} - \frac{1}{2}\left(-f + \frac{1}{2}\right) e^{-j2\pi f} & -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'ultimo termine si ottiene notando che $e^{-j2\pi\left(f+\frac{1}{2}\right)} = e^{-j2\pi f} e^{-j\pi} = -e^{-j2\pi f}$

Quindi nella banda $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$, $H(f) = -\frac{1}{2} e^{-j2\pi f}$ il cui modulo è $\frac{1}{2}$ e la fase $-2\pi f + \pi$.



Soluzione Esercizio 2 del 6/6/2022

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{i\theta} + rect\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-i\theta}$$

L'intervallo di campionamento $T = \frac{1}{2}$ introduce alias:

$$X_R(f) = 2\cos\theta \, rect\left(\frac{f}{2}\right)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = 2\cos(\theta) \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$$

B) L'espressione del segnale campionato si può ricavare sia dal segnale originale $x(t)$ sia dal segnale ricostruito $x_R(t)$:

$$x_n = x(nT) = 2\frac{\sin\left(2\pi \frac{n}{2}\right)}{\pi \frac{n}{2}} \cos\left(2\pi \frac{n}{2} + \theta\right) = 4\frac{\sin(2\pi n)}{\pi n} \cos(\pi n + \theta) = 4\delta_n \cos(\theta)$$

$$x_n = x_R(nT) = 2\cos(\theta) \frac{\sin\left(2\pi \frac{n}{2}\right)}{\pi \frac{n}{2}} = 4\delta_n \cos(\theta)$$

La DFT dei primi 10 campioni di x_n è:

$$X_k = 4\cos(\theta)$$

C) Annullare il terzo campione di X_k equivale a scrivere

$$Y_k = X_k - X_2\delta_{k-2} = X_k - 4\cos(\theta)\,\delta_{k-2}$$

L'espressione del segnale y_n è:

$$z_n = y_n - \frac{4}{10}\cos(\theta)\, e^{i2\pi\frac{2}{10}n}$$

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 3 del 6/6/2022</u>

A) La densità di probabilità delle ampiezze del processo x_n è uniforme nell'intervallo $-8 \div 4$, quindi il valor medio del processo è $m_x = -2$ e la varianza è $\sigma_x^2 = 12$.

Da cui $A = 4$ e $B = 16$

B) Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione del processo casuale $y_n = x_n * \frac{\sin \pi \frac{n}{10}}{\pi n}$

$S_y(\varphi) = S_x(\varphi) rect(10\varphi) = 16 rect(10\varphi) + 4\delta(\varphi)$

L'autocorrelazione del processo casuale y_n è

$$R_y[m] = 16 \frac{\sin \pi \frac{m}{10}}{\pi m} + 4$$

C) Si trovi la potenza del processo casuale $z_n = y_{n+8} + y_{n-2} + y_{n-12}$

I campioni di y_n sono a distanza 10 tra loro e dunque incorrelati tra loro.

Da qui:

$$P_z = \sigma_z^2 + m_z^2 = 3\sigma_y^2 + 9m_y^2 = 3\frac{8}{5} + 36 = 40.8$$