

Segnali per le comunicazioni – Preappello del 6/6/2026

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = 2 \left(\frac{\sin(\pi 4t)}{\pi t} \right)^2 \cos(4\pi(t + \tau))$

- A) Si calcoli l'espressione analitica della sua trasformata di Fourier $X(f)$
- B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$ nel caso in cui $\tau = 1/4$
- C) Scrivere l'espressione del modulo di $X(f)$ con τ generico (solo formula, non i grafici).

Esercizio 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin\left(\pi 4\left(t - \frac{1}{6}\right)\right)}{\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)}$ che viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 3$.

- A) Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n .
- B) Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo $x_R(t)$ ricostruito da x_n .
- C) Si calcoli la DFT dei primi 60 campioni del segnale y_n ottenuto campionando $x_R(t)$ agli istanti di tempo $t = \frac{n}{2} + \frac{1}{6}$ con n da 0 a 59.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo $x(t)$ bianco nella banda $-100 < f < 100$ con densità di probabilità uniforme, con valor medio $m_x = -2$ e varianza $\sigma_x^2 = 10$.

- A – Si trovi l'espressione del coefficiente di correlazione del processo discreto x_n ottenuto campionando $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 1kHz$
- B - Si calcoli valor medio e varianza di $y_n = 2x_n - 2x_{n-10}$.
- C - Si calcoli l'espressione della densità spettrale di potenza del processo y_n .
- D - La varianza di $|3x_n|$ è maggiore, minore o uguale a quella di $3x_n$? Perché?

Soluzione Esercizio 1 del 6/6/2026

A) La trasformata di Fourier di $x(t) = 2 \left(\frac{\sin(\pi 4t)}{\pi t} \right)^2 \cos(4\pi(t + \tau))$ ha la seguente espressione:

$$X(f) = e^{-i4\pi\tau} \text{tri}\left(\frac{f+2}{4}\right) + e^{i4\pi\tau} \text{tri}\left(\frac{f-2}{4}\right)$$

B) I grafici di modulo e fase della risposta in frequenza con $\tau = 1/4$

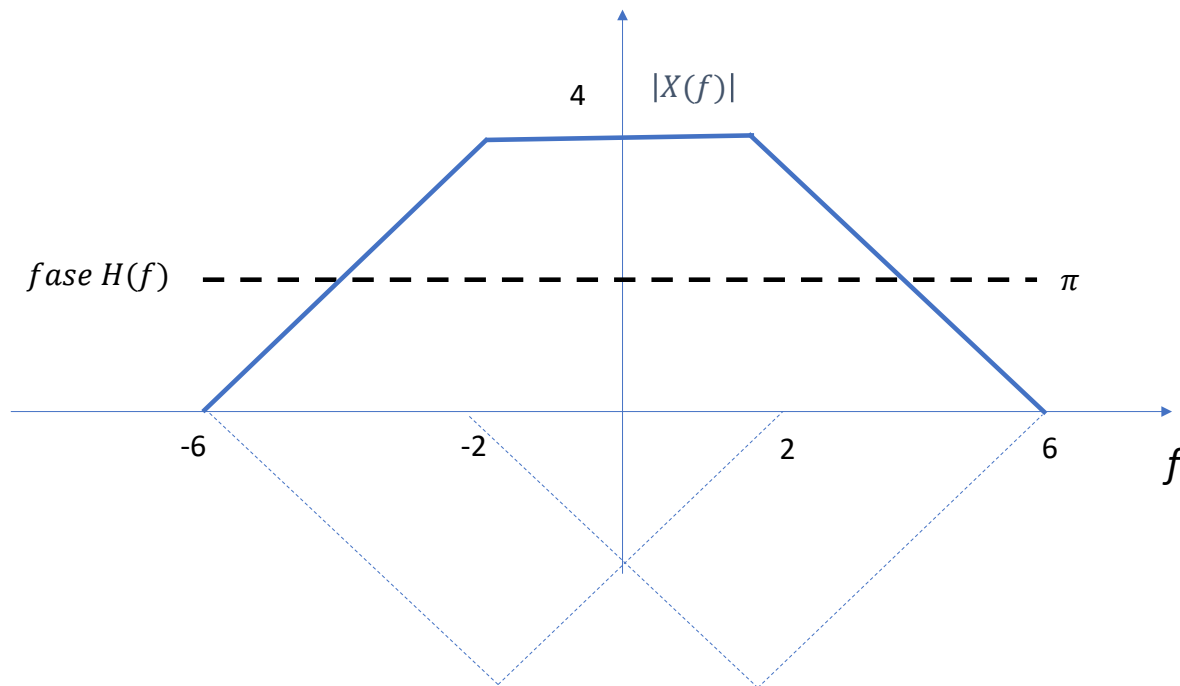
$$X(f) = e^{-i\pi} \text{tri}\left(\frac{f+2}{4}\right) + e^{i\pi} \text{tri}\left(\frac{f-2}{4}\right) = -\text{tri}\left(\frac{f+2}{4}\right) - \text{tri}\left(\frac{f-2}{4}\right)$$

si ottengo notando che:

1 - nella banda $-6 < f < -2$ $X(f) = -(f+6)$ e $|X(f)| = f+6$ $\angle X(f) = \pi$

2 - nella banda $2 < f < 6$ $X(f) = (f-6)$ e $|X(f)| = -f+6$ $\angle X(f) = \pi$

3 - nella banda $-2 < f < 2$ $X(f) = -(f+2) + (f-2) = -4$ e $|X(f)| = 4$, $\angle X(f) = \pi$



C) L'espressione del modulo di $X(f)$ con τ generico è indipendente da τ nelle bande $-6 < f < -2$ e $2 < f < 6$.

Nella banda $-2 < f < 2$, invece, le cose cambiano:

$$X(f) = e^{-i4\pi\tau} \text{tri}\left(\frac{f+2}{4}\right) + e^{i4\pi\tau} \text{tri}\left(\frac{f-2}{4}\right) = e^{i4\pi\tau}(f+2) + e^{-i4\pi\tau}(-f+2) = 2j \cdot f \cdot \sin(4\pi\tau) + 4 \cdot \cos(4\pi\tau)$$

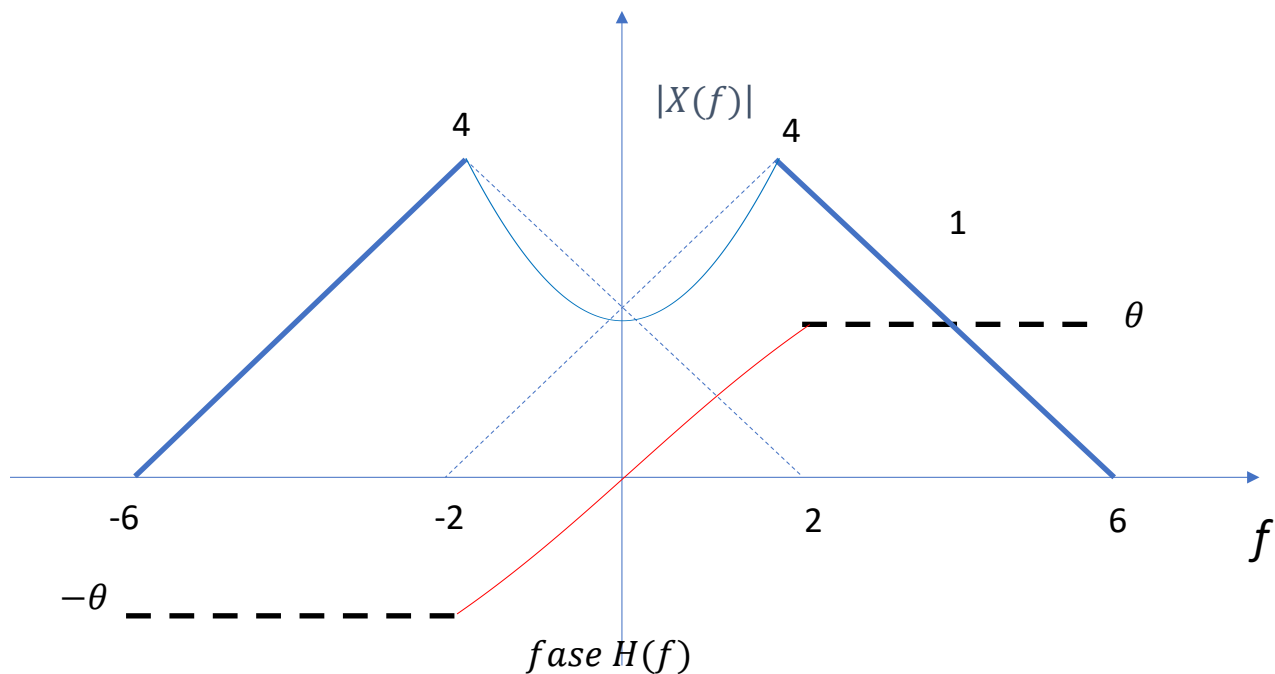
Dunque il modulo diventa:

$$|X(f)| = \sqrt{4f^2 \sin^2(4\pi\tau) + 16 \cos^2(4\pi\tau)}$$

E la fase:

$$\angle X(f) = \text{atan}\left(\frac{f \sin(4\pi\tau)}{2 \cos(4\pi\tau)}\right) = \text{atan}\left(\frac{f}{2} \tan(4\pi\tau)\right)$$

I grafici si riferiscono a $4\pi\tau = 0.5$ radianti.



Soluzione Esercizio 2 del 6/6/2026

A) La trasformata di $x(t) = \frac{\sin\left(\pi 4\left(t - \frac{1}{6}\right)\right)}{\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)}$ è:

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) e^{-i2\pi\frac{f}{6}}$$

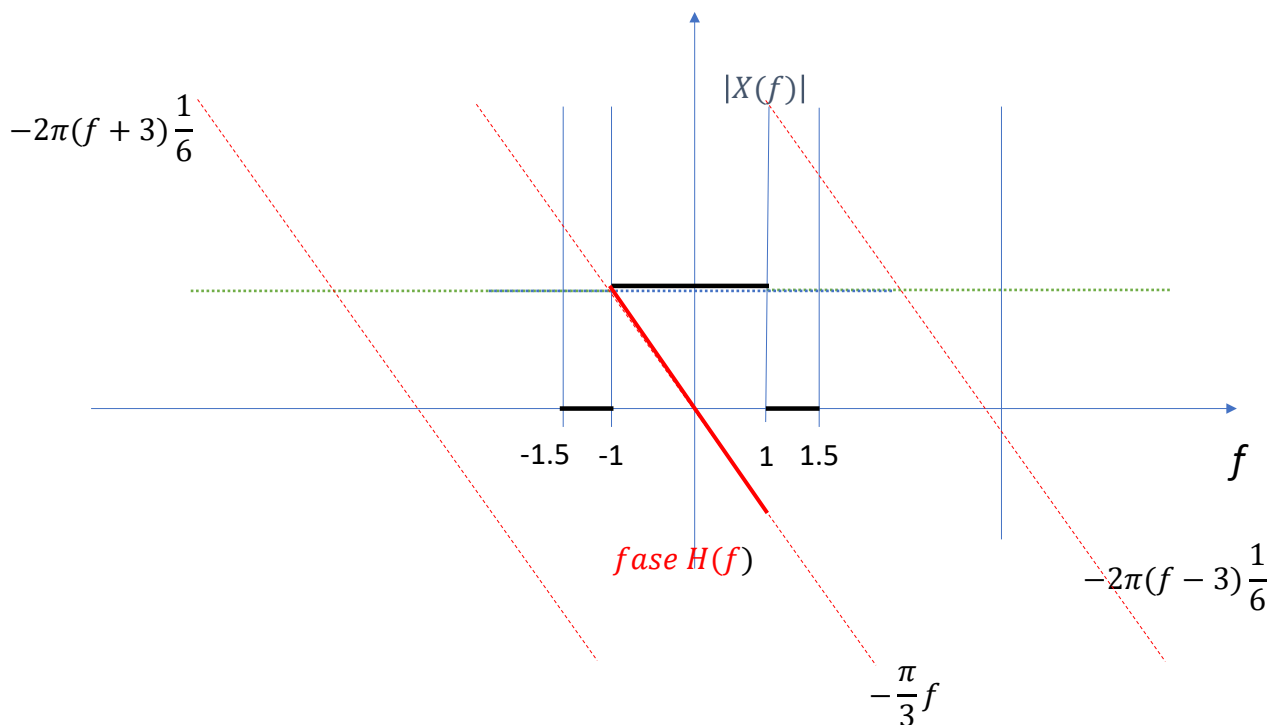
Con la frequenza di campionamento $f_s = 3$ si introduce alias.

Nella banda $-1 < f < 1$ $X(f) = 3e^{-i2\pi\frac{f}{6}}$

Nella banda $-1.5 < f < -1$ $X(f) = e^{-i2\pi\frac{f}{6}} + e^{-i2\pi\frac{(f+3)}{6}} = 3e^{-i\pi\frac{f}{3}}(1 + e^{-i\pi}) = 0$

Nella banda $1 < f < 1.5$ $X(f) = e^{-i2\pi\frac{f}{6}} + e^{-i2\pi\frac{(f-3)}{6}} = 3e^{-i\pi\frac{f}{3}}(1 + e^{i\pi}) = 0$

Il grafico della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n è riportato nella figura seguente. Il modulo della trasformata nella banda $-1 < f < 1$ è 3 e la trasformata è periodica di periodo 3.



B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è banalmente:

$$X_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) e^{-i2\pi\frac{f}{6}}$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{\sin\left(\pi 2\left(t - \frac{1}{6}\right)\right)}{\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)}$$

C) L'espressione di y_n è

$$x_R\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{\sin\left(\pi 2\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)\right)}{\pi\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)} = \frac{\sin(\pi n)}{\pi\frac{n}{2}} = 2\delta_n$$

La DFT su 60 campioni è $Y_k = 2$

Soluzione Esercizio 3 del 6/6/2026

a – l'autocorrelazione del processo dato è:

$$R_x(\tau) = \frac{10}{200} \frac{\sin(\pi 200\tau)}{\pi\tau} + 4$$

Il coefficiente di correlazione è:

densità spettrale di potenza è dunque:

$$\rho_x(\tau) = \frac{\sin(\pi 200\tau)}{\pi 200\tau}$$

Campionando a $f_s = 1\text{kHz}$ si ottiene:

$$\rho_x[m] = \frac{\sin\left(\pi \frac{m}{5}\right)}{\pi \frac{m}{5}}$$

b – I campioni di x_n sono incorrelati a passo $n = 5$, dunque il valor medio e la varianza di

$y_n = 2x_n - 2x_{n-10}$ valgono: $m_y = 0$ e $\sigma_y^2 = 4\sigma_x^2 + 4\sigma_x^2 = 80$.

c - Il calcolo della densità spettrale di potenza di $y_n = 2x_n - 2x_{n-10}$ può passare attraverso il calcolo della sua autocorrelazione, dove:

$$R_x[m] = 10 \frac{\sin\left(\pi \frac{m}{5}\right)}{\pi \frac{m}{5}} + 4$$

$$R_y[m] = R_x[m] * (2\delta_m - 2\delta_{m-10}) * (2\delta_m - 2\delta_{m+10}) = R_x[m] * (8\delta_m - 4\delta_{m-10} - 4\delta_{m+10})$$

$$R_y[m] = 8R_x[m] - 4R_x[m \pm 10]$$

$$R_y[m] = 80 \frac{\sin\left(\pi \frac{m}{5}\right)}{\pi \frac{m}{5}} - 80 \frac{\sin\left(\pi \frac{m-10}{5}\right)}{\pi \frac{m-10}{5}} - 80 \frac{\sin\left(\pi \frac{m+10}{5}\right)}{\pi \frac{m+10}{5}}$$

La densità spettrale di potenza:

$$S_y(\phi) = 80 \operatorname{rect}(5\phi) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j20\pi\phi} - \frac{1}{2}e^{j20\pi\phi}\right) = 400 \operatorname{rect}(5\phi)(1 - \cos 20\pi\phi)$$

Oppure più semplicemente

$$S_y(\phi) = S_x(\phi)|H(\phi)|^2 = S_x(\phi)|2 - 2e^{-j20\pi\phi}|^2 = S_x(\phi)(8 - \cos 20\pi\phi)$$

$$S_y(\phi) = [50\operatorname{rect}(5\phi) + 4\delta(\phi)](8 - \cos 20\pi\phi) = 400 \operatorname{rect}(5\phi)(1 - \cos 20\pi\phi)$$

In frequenza:

$$S_y(f) = 400 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{200}\right) \left(1 - \cos \pi \frac{f}{200}\right)$$

d - La densità di probabilità di x_n con valor medio $m_x = -2$ e varianza $\sigma_x^2 = 10$ è uniforme con $\Delta = \sqrt{12\sigma_x^2} \cong 11$. La densità di probabilità di $3x_n$ è anch'essa uniforme con valori sia positivi che negativi dato che il suo valor medio è $3m_x = -6$ e il suo range di valori $\Delta = \sqrt{12 \cdot 9\sigma_x^2} \cong 33$. Quindi valori che vanno da -22.5 a circa 10.5.

Il modulo di $3x_n$ ha un range di valori tutti positivi (da 0 a $\frac{33}{2} + 6 = 22.5$) e un valor medio positivo maggiore di 6:

$$E[|3x_n|] = \frac{1}{33} \int_{-22.5}^0 (-a) da + \frac{1}{33} \int_0^{10.5} a da \cong \frac{1}{33} (253 + 55) \cong 9.3$$

La dispersione dei valori di $|3x_n|$ è sicuramente minore di quella di $3x_n$ così come la sua varianza:

$$\sigma_{|3x|}^2 = E[|3x_n|^2] - E[|3x_n|]^2 < E[3x_n^2] - E[3x_n]^2$$