Segnali per le comunicazioni – Appello del 3/6/2025

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia consideri il segnale $x(t) = \frac{\sin(4\pi(t-1))}{\pi(t-1)} \sin(2\pi(t-2))$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $X(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$

C) Si trovi l'espressione della traformata di Fourier del segnale: $y(t) = x(t) * \cos^2(2\pi t)$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \sin(3\pi t) \cdot \sin(2\pi t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 4$ ottenendo il segnale discreto x_n.

A) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

B) Si trovi l'espressione della DFT di x_n con $0 \leq n \leq 39$.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario $x(t)$ bianco nella banda $-\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2}$ con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana con media e varianza unitarie.

A – Si scriva l'espressione dell'autocorrelazione del processo $x(t)$.

B – Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo $y(t) = x(t) + x\left(t - \frac{1}{B}\right)$ e se ne tracci il grafico.

C – Il processo $y(t)$ viene campionato a passo $T = \frac{2}{B}$ ottenendo il processo discreto y_n. Si calcoli la varianza della somma di 3 campioni consecuitvi di y_n. (*suggerimento: è più semplice lavorare nel dominio delle frequenze utilizzando il grafico del punto precedente …*)

Soluzione Esercizio 1 del 3/6/2025

A) $x(t) = \frac{\sin(4\pi(t-1))}{\pi(t-1)} \sin(2\pi(t-2)) = \frac{\sin(4\pi(t-1))}{\pi(t-1)} \sin(2\pi t)$

Da qui, la trasformata di Fourier

$$X(f) = \frac{j}{2} e^{-j2\pi(f+1)} rect\left(\frac{(f+1)}{4}\right) - \frac{j}{2} e^{-j2\pi(f-1)} rect\left(\frac{(f-1)}{4}\right)$$

Ancora $e^{\pm j2\pi} = 1$, quindi

$$X(f) = \frac{j}{2} e^{-j2\pi f} rect\left(\frac{(f+1)}{4}\right) - \frac{j}{2} e^{-j2\pi f} rect\left(\frac{(f-1)}{4}\right)$$

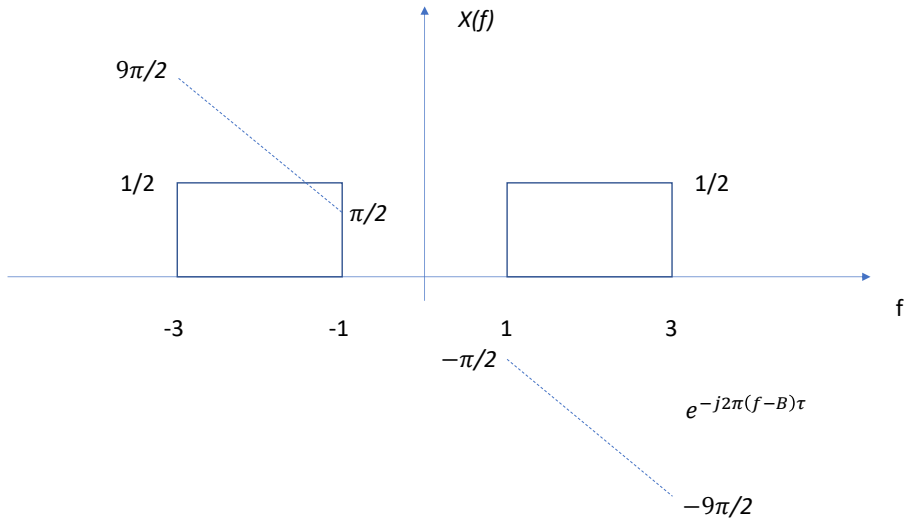
B) $X(f)$ può utilmente essere scomposta nelle 3 bande

$-3 < f < -1$ dove vale $\frac{j}{2} e^{-j2\pi f}$ modulo ½ e fase $-2\pi f + \frac{\pi}{2}$

$1 < f < 3$ dove vale $\frac{-j}{2} e^{-j2\pi f}$ modulo ½ e fase $-2\pi f - \frac{\pi}{2}$

$-1 < f < 1$ dove vale $\frac{j}{2} e^{-j2\pi f} - \frac{j}{2} e^{-j2\pi f} = 0$

Dunque il grafico di modulo e fase è il seguente:



C) $\cos^2(2\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)$, quindi $Y(f) = X(f)\left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f-2) + \frac{1}{4}\delta(f+2)\right) =$

$= -\frac{j}{8}\delta(f-2) + \frac{j}{8}\delta(f+2)$ da cui $y(t) = \frac{1}{4}\sin(4\pi t)$

Soluzione Esercizio 2 del 3/6/2025

A) La trasformata di $x(t) = \sin(3\pi t) \cdot \sin(2\pi t)$ è

$$X(f) = \left[\frac{j}{2}\delta\left(f + \frac{3}{2}\right) - \frac{j}{2}\delta\left(f - \frac{3}{2}\right)\right] * \left[\frac{j}{2}\ \delta(f+1) - \frac{j}{2}\delta(f-1)\right]$$

Eseguendo la convoluzione si ottengo 4 impulsi:

$$X(f) = \left[\frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{5}{2}\right)\right]$$

Si noti che il segnale dato poteva scriversi come:

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(\pi t) - \frac{1}{2}\cos(5\pi t)$$

Con la frequenza di campionamento $f_s = 4$ si introduce alias solo per le componenti spettrali con frequenza in modulo maggiore di 2 :

$$x_R(t) = \frac{1}{2}\cos(\pi t) - \frac{1}{2}\cos(3\pi t)$$

B) L'espressione della DFT di x_n con $0 \leq n \leq 39$ si calcola facilmente notando che:

$$x_n = x_R\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{1}{8}n\right) - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{3}{8}n\right)$$

In 40 campioni ci sono esattamente 5 cicli del primo coseno con frequenza normalizzata 1/8 e 15 cicli del secondo coseno con frequenza normalizzata 3/8. Dunque:

$$X_k = 10\delta_{k-5} + 10\delta_{k-35} - 10\delta_{k-15} - 10\delta_{k-25}$$

o equivalentemente,

$$X_k = 10\delta_{k-5} + 10\delta_{k+5} - 10\delta_{k-15} - 10\delta_{k+15}$$

Soluzione Esercizio 3 del 3/6/2025

A – Dai dati del problema $S_x(f) = \delta(f) + \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)$.

L'espressione dell'autocorrelazione del processo $x(t)$ è dunque:

$$R_x(\tau) = 1 + \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau}$$

B – La densità spettrale di potenza del processo $y(t) = x(t) + x\left(t - \frac{1}{B}\right)$ vale $S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$

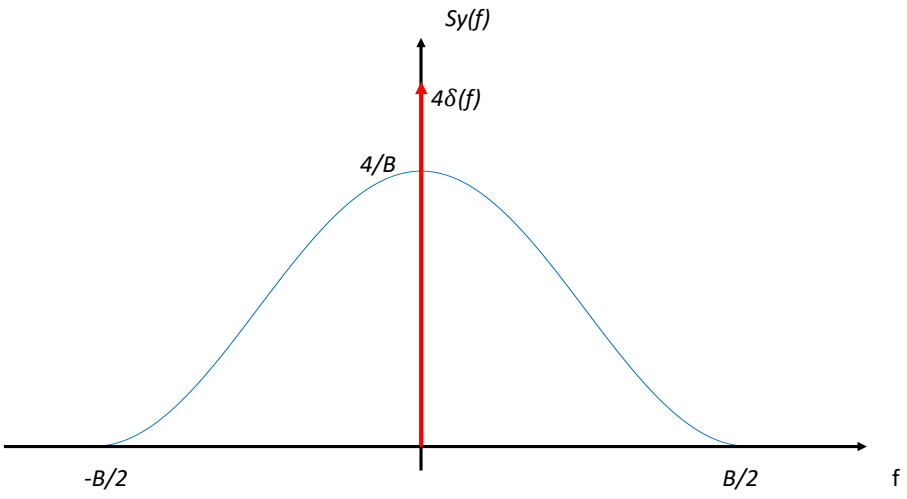
Si nota che $y(t) = x(t) * h(t)$ con $h(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{1}{B}\right)$ e dunque

$$|H(f)|^2 = \left(1 + e^{-i2\pi\frac{1}{B}f}\right)\left(1 + e^{i2\pi\frac{1}{B}f}\right) = 2 + 2\cos\left(2\pi\frac{1}{B}f\right)$$

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[\delta(f) + \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)\right]\left[2 + 2\cos\left(2\pi\frac{1}{B}f\right)\right]$$

$$S_y(f) = \frac{1}{B}\left[2 + 2\cos\left(2\pi\frac{1}{B}f\right)\right] rect\left(\frac{f}{B}\right) + 4\,\delta(f)$$

Il grafico è:



B – Campionare il processo $y(t)$ a passo $T = \frac{2}{B}$ equivale a campionare la sua autocorrelazione e quindi a priodicizzare a passo $\frac{B}{2}$ in frequenza la sua densità spettrale di potenza e moltiplicarla per $\frac{B}{2}$

.

Sia dal grafico, sia analiticamente è chiaro che la periodicizzazione porta a una densità spettrale di potenza costante nella banda $-\frac{B}{4} \leq f \leq \frac{B}{4}$ del processo campionato. E' sufficiente notare il grafico seguente oppure, analiticamente:

$$\cos\left(2\pi\frac{1}{B}f\right) + \cos\left(2\pi\frac{1}{B}\left(f \pm \frac{B}{2}\right)\right) = \cos\left(2\pi\frac{1}{B}f\right) + \cos\left(2\pi\frac{1}{B}f \pm \pi\right) = 0$$

E dunque

$\tilde{S}_y(f) = 2\, rect\left(\frac{2f}{B}\right) + 2B\ \delta(f)$ periodica di periodo $\frac{B}{2}$.

il processo discreto y_n ha dunque campioni indipendenti a valor medio nullo quindi la varianza del somma di 3 campioni consecutivi è data da $3\sigma_y^2$.

$$\sigma_y^2 = \frac{2}{B}\int_{-\frac{B}{4}}^{\frac{B}{4}} 2\, df = 2$$

Volendo si sarebbe potuto ragionare anche nei tempi:

$$h(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{1}{B}\right)$$

$$h(t) * h(-t) = 2\delta(t) + \delta\left(t \pm \frac{1}{B}\right)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = 2R_x(\tau) + R_x\left(\tau \pm \frac{1}{B}\right)$$

D qui:

$$R_y(\tau) = 2\,\frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau} + \frac{\sin\,(\pi B\tau \pm \pi)}{(\pi B\tau \pm \pi)} + 4$$

E quindi:

$$C_y(\tau) = 2\,\frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau} + \frac{\sin\,(\pi B\tau \pm \pi)}{(\pi B\tau \pm \pi)}$$

Campionando a passo $T = \frac{2}{B}$

$$C_y[m] = 2\,\frac{\sin(\pi 2m)}{\pi 2m} + \frac{\sin(\pi 2m \pm \pi)}{(\pi 2m \pm \pi)} = 2\delta_m$$