Segnali per le comunicazioni – PRE-Appello del 4/6/2024

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \frac{\sin(2\pi B\ )}{\pi t}\cos\left(\pi Bt + \frac{3}{4}\pi\right)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$

C) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = h(t) * \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2$ con frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{2}$.

A) Si tracci il grafico della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata del segnale x_n.

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

C) Si trovi l'espressione della DFT dei primi 10 campioni di $y_n = x_R(2n)$

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale discreto, stazionario x_n. I campioni del processo possono assumere solo i valori interi 1 e -1 con la medesima probabilità. I campioni tra loro adiacenti hanno correlazione ½. A distanze maggiori sono indipendenti.

A) Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo dato e se ne calcoli la potenza.

B) Il processo x_n viene filtrato con la risposta all'impulso $h_n = A\delta_n + A\delta_{n-1}$ producendo in uscita il processo y_n. Sapendo che la potenza di y_n è 3 , si trovi il valore A della risposta all'impulso h_n.

C) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza di y_n.

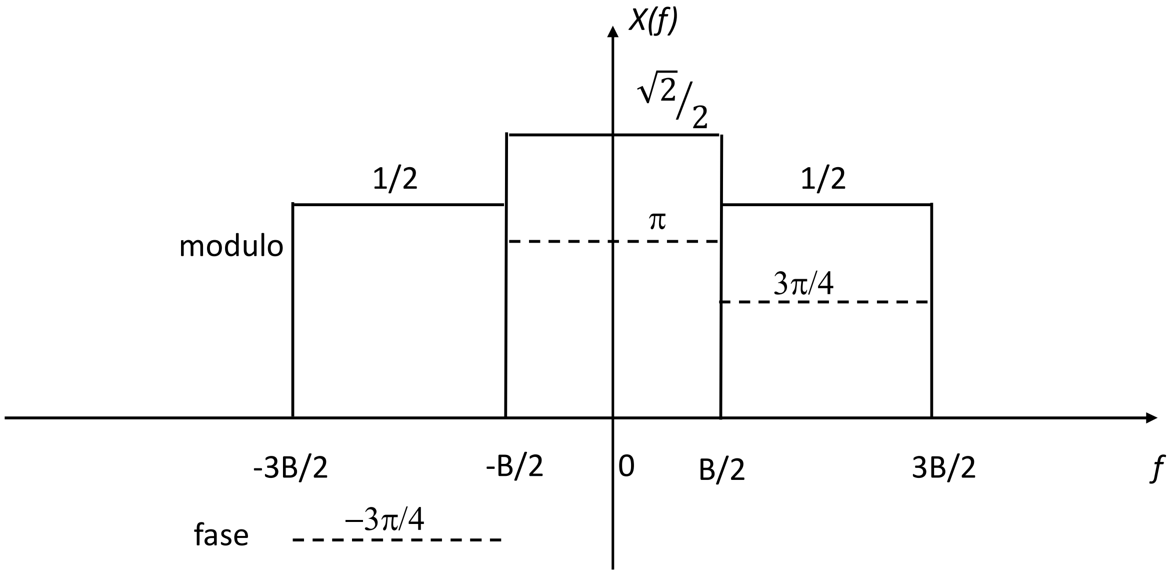
D) Si trovi l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze di y_n <u>nell'ipotesi in cui x_n sia bianco</u>.

Soluzione Esercizio 1 del 4/6/2024

A) La trasformata di Fourier di $h(t) = \frac{\sin(2\pi B\ )}{\pi t} \cos\left(\pi B t + \frac{3}{4}\pi\right)$ ha la seguente espressione:

$H(f) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{4}\pi} rect\left(\frac{f}{2B} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{j\frac{3}{4}\pi} rect\left(\frac{f}{2B} - \frac{1}{2}\right)$

B) I grafici di modulo e fase della risposta in frequenza sono i seguenti



C) Nel dominio delle frequenze $Y(f) = X(f)H(f) = H(f) \cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right)$

La trasformata dell'uscita può scriversi come somma di 3 rettangoli:

$$Y(f) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{4}\pi} rect\left(\frac{2f}{B} + \frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} rect\left(\frac{f}{B}\right) + \frac{1}{2} e^{j\frac{3}{4}\pi} rect\left(\frac{2f}{B} - \frac{3}{2}\right)$$

da cui $y(t) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{4}\pi} e^{-j2\pi\frac{3B}{4}t} \frac{\sin\left(\pi\frac{B}{2}t\right)}{\pi t} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{3}{4}\pi} e^{j2\pi\frac{3B}{4}t} \frac{\sin\left(\pi\frac{B}{2}t\right)}{\pi t}$

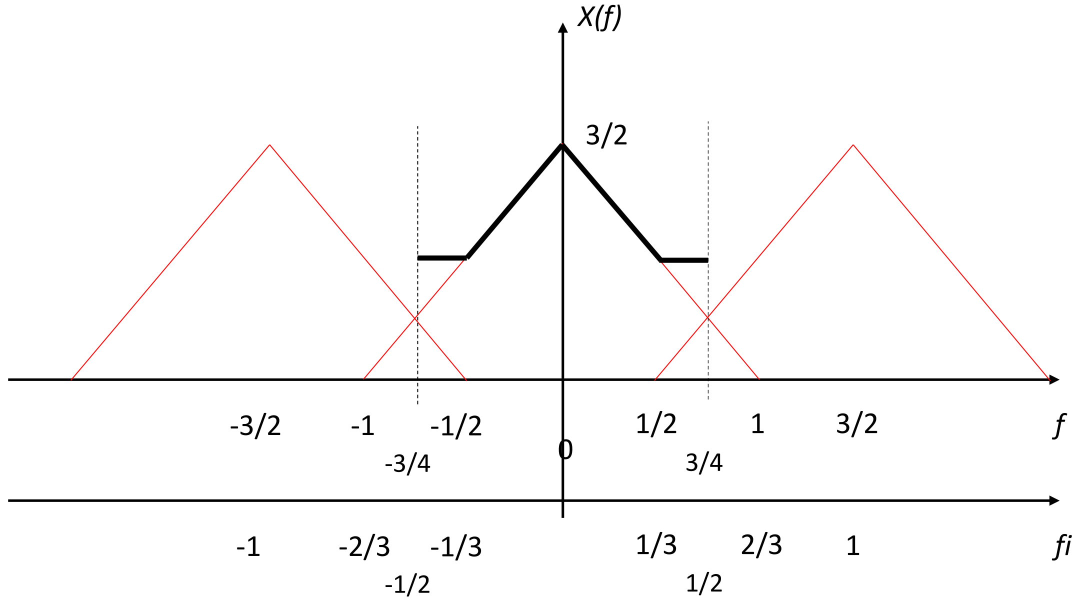
In forma più compatta: $y(t) = \frac{\sin\left(\pi\frac{B}{2}t\right)}{\pi t} \cos\left(2\pi\frac{3B}{4}t + \frac{3}{4}\pi\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t}$

Soluzione Esercizio 2 del 4/6/2024

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = tri(f)$$

Con la frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{2}$ si introduce alias:



B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{2}{3}f\right) + \frac{1}{2} tri(2f)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right)}{\pi t} + \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\pi t}\right)^2$$

C) L'espressione di $y_n = x_R(2n)$ è:

$$y_n = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{3\pi 2n}{2}\right)}{\pi 2n} + \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi 2n}{2}\right)}{\pi 2n}\right)^2 = \frac{3}{4}\delta_n + \frac{1}{4}\delta_n = \delta_n$$

La DFT su 10 campioni è $Y_k = 1$

Soluzione Esercizio 3 del 4/6/2024

A) Dai dati del problema:

$$m_x = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$E[x_n^2] = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\sigma_x^2 = 1$$

Dato che i campioni sono tra loro indipendenti il processo è bianco:

$$R_x[m] = \delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}$$

B) La potenza dell'uscita è data dal suo valore quadratico medio:

$$E[y_n^2] = E[(Ax_n + Ax_{n-1})^2] = (A^2 + A^2)\sigma_x^2 + A^2\sigma_x^2 = 3A^2 = 3$$

$$A = \pm 1$$

C) Nota $h_m = \delta_m + \delta_{m-1}$ è immediato calcolare il valor medio

L'autocorrelazione dell'uscita ha la seguente espressione:

$R_y[m] = \left(\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{1}{2}\delta_{m+1}\right) * (2\delta_m + \delta_{m-1} + \delta_{m+1}) = 3\delta_m + 2\delta_{m-1} + 2\delta_{m+1} + \frac{1}{2}\delta_{m+2} + \frac{1}{2}\delta_{m-2}$

E la densità spettrale di potenza vale:

$S_y(f) = 3 + 4\cos 2\pi f + \cos 4\pi f$ periodica di periodo 1

Oppure, più semplicemente:

$$S_y(f) = (1 + \cos 2\pi f)(2 + 2\cos 2\pi f)$$

D) La densità di probabilità delle ampiezze di y_n si calcola **sfruttando l'indipendenza dei campioni** di x_n e sfruttando la probabilità condizionata:

I valori che può assumere y_n sono solo 4 con la medesima probabilità 1/4:

$$x_n = 1 \; e \; x_{n-1} = 1, \qquad y_n = 1 + 1 = 2$$

$$x_n = 1 \; e \; x_{n-1} = -1, \qquad y_n = 1 - 1 = 0$$

$$x_n = -1 \; e \; x_{n-1} = 1, \qquad y_n = -1 + 1 = 0$$

$$x_n = -1 \; e \; x_{n-1} = -1, \qquad y_n = -1 - 1 = -2$$

La densità di probabilità delle ampiezze di y_n ha dunque la seguente espressione:

$$f_y(a) = \frac{1}{4}\delta(a-2) + \frac{1}{4}\delta(a+2) + \frac{1}{2}\delta(a)$$