Segnali per le comunicazioni – PRE-Appello del 6/6/2023

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t} \sin(\pi B t)$

A) Si traccino i grafici di modulo e fase di $X(f)$

B) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = x(t) * \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t}$.

C) Si tracci il grafico della parte immaginaria di $Z(f)$, trasformata di Fourier del segnale $z(t) = x(t) \cdot \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t}$, moltiplicazione di $x(t)$ con $\frac{\sin(\pi B t)}{\pi t}$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\pi t} + \cos\big(16\pi(t-\tau)\big)$ con frequenza di campionamento $f_s = 3$.

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata del segnale x_n.

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n.

C) Si trovi l'espressione della DFT dei primi 16 campioni di $y_n = x_R(2n)$

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana e autocorrelazione $R_x(\tau) = 5\left[\frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}\right]^2 + 4$. Il processo $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 4$ ottenendo il processo casuale discreto x_n.

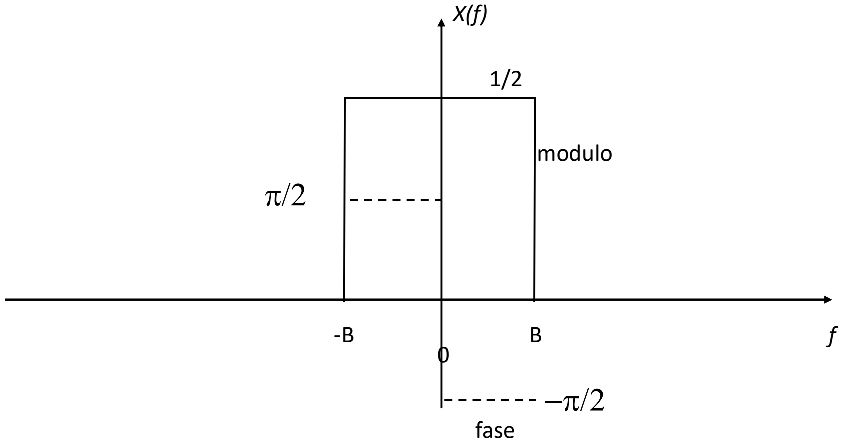
A) Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione del processo casuale $y_n = x_{2n}$

B) Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale $z_n = x_{2n} - x_{2n+2}$

C) Si trovi l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze di z_n e si dica, motivando la risposta, se la varianza di $|z_n|$ è uguale, maggiore o minore di quella di z_n

Soluzione Esercizio 1 del 6/6/2023

A) $X(f) = -\frac{j}{2} rect\left(\frac{f}{B} - \frac{1}{2}\right) + \frac{j}{2} rect\left(\frac{f}{B} + \frac{1}{2}\right)$

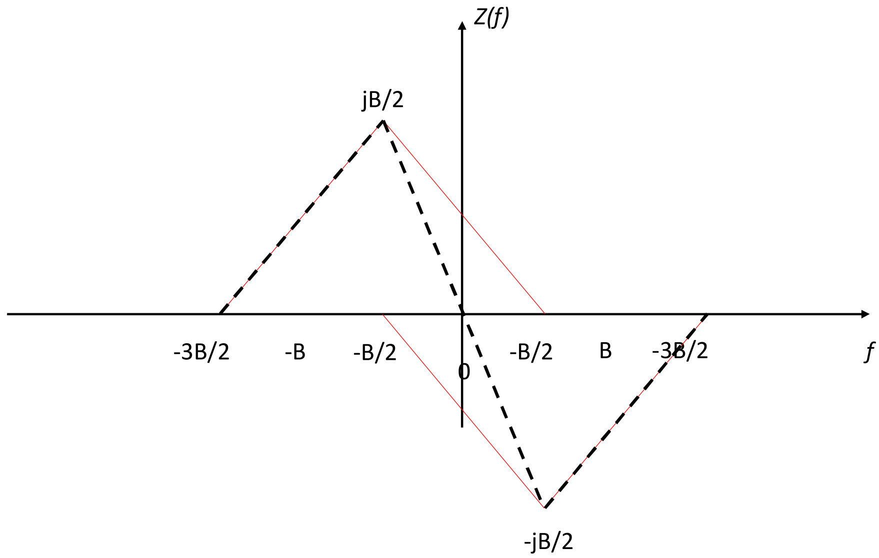


B) $Y(f) = X(f)H(f) = X(f) \cdot rect\left(\frac{f}{B}\right)$ da cui $y(t) = \frac{\sin\left(\pi\frac{B}{2}t\right)}{\pi t} \sin\left(\pi \frac{B}{2} t\right)$

C) $Z(f) = X(f) * rect\left(\frac{f}{B}\right)$

Il modo più veloce di tracciare il grafico della parte immaginaria di $Z(f)$ è quello di sfruttare la proprietà distributiva della convoluzione:

$$Z(f) = X(f) * rect\left(\frac{f}{B}\right) = \left[\frac{j}{2} rect\left(\frac{f}{B} + \frac{1}{2}\right) - \frac{j}{2} rect\left(\frac{f}{B} - \frac{1}{2}\right)\right]$$



Soluzione Esercizio 2 del 6/6/2023

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = rect(2f) + \frac{1}{2}\delta(f-8)e^{-i2\pi f\tau} + \frac{1}{2}\delta(f+8)e^{-i2\pi f} =$$

$$= rect(2f) + \frac{1}{2}\delta(f-8)e^{-i16\pi\tau} + \frac{1}{2}\delta(f+8)e^{i16\pi\tau}$$

frequenza di campionamento $f_s = 3$ introduce alias solo per la parte di trasformata del coseno:

$\tilde{X}(f) = 3rect(2f) + \frac{3}{2}\delta(f+1)e^{-i16\pi\tau} + \frac{3}{2}\delta(f-1)e^{i16\pi}$ di periodo 3

E ponendo $f = 3\varphi$

$\tilde{X}(\varphi) = 3rect(6\varphi) + \frac{1}{2}\delta\left(\varphi + \frac{1}{3}\right)e^{-i16\pi\tau} + \frac{1}{2}\delta\left(\varphi - \frac{1}{3}\right)e^{i16\pi\tau}$ di periodo 1

B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = rect(2f) + \frac{1}{2}\delta(f+1)e^{-i16\pi\tau} + \frac{1}{2}\delta(f-1)e^{i16}$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\pi t} + \cos\big(2\pi(t+8\tau)\big)$$

C) L'espressione di $y_n = x_R(2n)$ è:

$$y_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi 2n}{2}\right)}{\pi 2n} + \cos\big(2\pi(2n+8\tau)\big) = \frac{1}{2}\delta_n + \cos(16\pi\tau)$$

La DFT è:

$$Y_k = \frac{1}{2} + 16\cos(16\pi\tau)\ \delta_k$$

Soluzione Esercizio 3 del 6/6/2023

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana e autocorrelazione $R_x(\tau) = 5\left[\frac{\sin(2\pi\tau)}{\pi\tau}\right]^2 + 4$. Il processo $x(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 4$ ottenendo il processo casuale discreto x_n.

A) Campionare con $f_s = 4$ il processo $x(t)$ e poi considerare il processo $y_n = x_{2n}$ è equivalente a campionare il processo $x(t)$ con $f_s = 2$. Dunque:

$$R_y[m] = 5\left[\frac{\sin\left(2\pi\frac{m}{2}\right)}{\pi\frac{m}{2}}\right]^2 + 4 = 20\delta_m + 4$$

B) L'autocorrelazione del processo casuale $z_n = x_{2n} - x_{2n+2} = y_n - y_{n+1} = y_n * (\delta_m - \delta_{m+1})$ è data dalla nota formula;

$$R_z[m] = R_y[m] * (2\delta_m - \delta_{m+1} - \delta_{m-1}) = 40\delta_m - 20\delta_{m+1} - 20\delta_{m-1}$$

La densità spettrale di potenza è:

$S_x(f) = 40 - 40\cos(2\pi f)$ che è periodica di periodo 1

C) La densità di probabilità delle ampiezze di z_n è gaussiana a valor medio nullo e varianza 40.

I valori negativi di z_n sono ribaltati sull'asse positivo dal modulo e dunque la densità di probabilità delle ampiezze di $|z_n|$ sarà data dalla sola parte positiva della gaussiana moltiplicata per 2 per garantire integrale unitario.

La dispersione dei valori di $|z_n|$ rispetto alla media positiva è senz'altro minore della dispersione dei valori di z_n simmetrici rispetto alla media nulla.