Segnali per le comunicazioni – PRE-Appello del 8/6/2021

Esercizio 1 da svolgere in 35 minuti

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin(2\pi f_o t)}{\pi t}\frac{\sin(4\pi f_o t)}{\pi t}$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ e se ne tracci il grafico.

B) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 5f_o$ ottenendo il segnale discreto x_n. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier di x_n.

C) Si disegni il grafico della trasformata $X_R(f)$ del segnale tempo-continuo ricostruito e si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$.

<u>**Soluzione**</u> <u>Esercizio 1 del 8/6/2021</u>

Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin(2\pi f_o t)}{\pi t} \frac{\sin(4\pi f_o t)}{\pi t}$

A) Si trovi l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$.

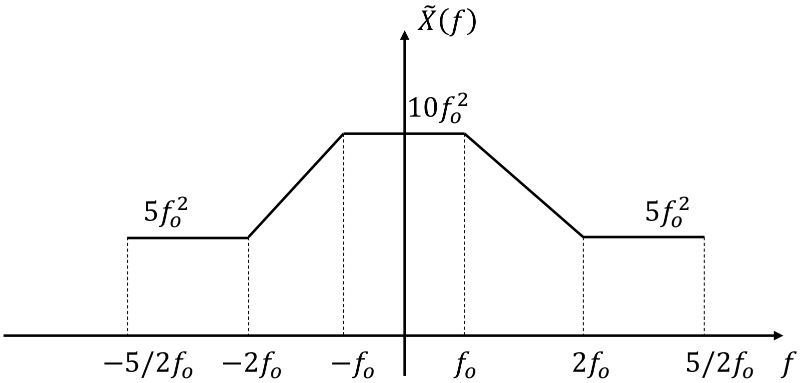
$$X(f) = rect\left(\frac{f}{2f_o}\right) * rect\left(\frac{f}{4f_o}\right)$$

$X(f)$ è reale quindi basta un solo grafico

$$X(f) = \begin{cases} 2f_o & -f_o < f < f_o \\ f + 3f_o & -3f_o \le f \le -f_o \\ -f + 3f_o & f_o < f < 3f_o \end{cases}$$

B) Si campioni $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 5f_o$ ottenendo il segnale discreto x_n. Si tracci il grafico della trasformata di Fourier di x_n.

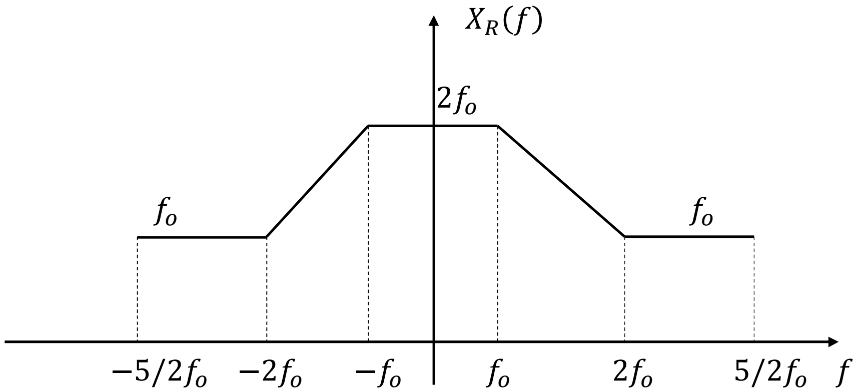
Il campionamento introduce alias. La trasformata $\tilde{X}(f)$ si calcola nella banda $-\frac{5}{2}f_o \le f \le \frac{5}{2}f_o$ dove vale:



Periodica di periodo $f_s = 5f_o$.

C) Si disegni il grafico della trasformata $X_R(f)$ del segnale tempo-continuo ricostruito $x_R(t)$ e si calcoli l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$.

La trasformata di Fourier del segnale ricostruito ha il seguente grafico:



Questa può essere convenientemente vista come:

$$X_R(f) = f_o rect\left(\frac{f}{5f_o}\right) + rect\left(\frac{f}{2f_o}\right) * rect\left(\frac{f}{2f_o}\right) - rect\left(\frac{f}{f_o}\right) * rect\left(\frac{f}{f_o}\right)$$

Da qui è facile ricavare l'espressione del segnale ricostruito:

$$x_R(t) = f_o \frac{\sin \pi 5 f_o t}{\pi t} + \left(\frac{\sin \pi 2 f_o t}{\pi t}\right)^2 - \left(\frac{\sin \pi f_o t}{\pi t}\right)^2$$

Ci sono tuttavia altre possibilità che portano ad un risultato corretto anche apparentemente diverso da quello riportato sopra.

Segnali per le comunicazioni – PRE-Appello del 8/6/2021

Esercizio 2 da svolgere in 35 minuti

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario tempo continuo bianco nella banda bilatera 200Hz ($-100 < f < 100$). La densità di probabilità delle ampiezze è uniforme tra 0 e 12.

A) Si scrivano le espressioni dell'autocorrelazione e del coefficiente di correlazione del processo dato.

B) Si trovi per quale valore di t_o la potenza di $y(t) = x(t) - x(t - t_o)$ è uguale a 24.

C) Il processo $x(t)$ viene campionato a passo T dopo aver aggiunto una costante C, ottenendo così il processo discreto z_n. Il processo z_n è convoluto con una risposta all'impulso discreta h_n ignota. Quale intervallo di campionamento e quale costante sceglieresti per stimare h_n e perchè?

Soluzione Esercizio 2 del 8/6/2021

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario tempo continuo bianco nella banda bilatera 200Hz ($-100 < f < 100$). La densità di probabilità delle ampiezze è uniforme tra 0 e 12.

A) La varianza di una densità di probabilità uniforme è data da $\sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 12.$

Il valor medio è 6. Dunque le espressioni dell'autocorrelazione e del coefficiente di correlazione del processo dato sono:

$$R_x(\tau) = \frac{3}{50}\frac{\sin \pi 200t}{\pi t} + 36$$

$$\rho_x(\tau) = \frac{\sin \pi 200t}{\pi 200t}$$

B) La potenza di $y(t) = x(t) - x(t - t_o)$ coincide con il suo valore quadratico medio:

$$P_y = E[y(t)^2] = E[x(t)^2 + x(t+t_o)^2 - 2x(t)x(t+t_o)] = 2R_x(0) - 2R_x(t_o) = 24$$

Da qui: $R_x(0) - R_x(t_o) = 12$

e $R_x(t_o) = R_x(0) - 12 = 36$ da cui $\frac{\sin \pi 200t}{\pi t} = 0$ e quindi $t_o = \frac{k}{200}$

Più semplicemente bastava notare che il valor medio di $y(t)$ è nullo, che la potenza di $y(t)$ coincide con la sua varianza e che 24 è il doppio della varianza di $x(t)$. Dunque la varianza della differenza $x(t) - x(t - t_o)$ è uguale alla somma delle varianze di $x(t)$ e questo si ottiene solo se $x(t)$ e $x(t - t_o)$ sono incorrelati cioè se $\frac{\sin \pi 200t}{\pi t} = 0$.

C) Il processo $x(t)$ viene campionato a passo T dopo aver aggiunto una costante C, ottenendo così il processo discreto z_n. Il processo z_n è convoluto con una risposta all'impulso discreta h_n ignota. Quale intervallo di campionamento e quale costante sceglieresti per stimare h_n e perché?

Dalla teoria è ben noto che:

$$R_{yz}[m] = R_z[m] * h_m$$

Se $R_z[m] = k\delta_m$ allora la cross-correlazione uscita ingresso è una versione scalata in ampiezza della risposta all'impulso ignota.

Affichè $R_z[m] = k\delta_m$ è necessario campionare il segnale continuo con un intervallo di campionamento pari ad uno degli zeri dell'auto correlazione $R_x(\tau)$ e annullare il valor medio di $x(t)$ sottraendo una costante uguale a 6.

Dunque $T = \frac{k}{200}$ e $C = -6$