TELECOMUNICAZIONI PROVA AGGIUNTIVA DEL 9/7/2008

Sia dato il segnale $x(t) = t^2 + w(t)$ dove $w(t)$ e' un rumore bianco nella banda compresa tra –B/2 e +B/2, a valor medio nullo con varianza $\sigma_w^2$.

In assenza di rumore il minimo del segnale $x(t)$ e' ovviamente in $t = 0$. A causa del rumore additivo, il minimo si sposta ad un diverso valore di $t$ in dipendenza della realizzazione del processo casuale $w(t)$.

Trovare valor medio e varianza del tempo per cui il segnale $x(t)$ e' minimo. (Si ipotizzi che la banda B sia sufficientemente stretta da poter escludere brusche variazioni del segnale intorno all'origine).

SOLUZIONE

Il minimo del segnale si trova annullando la derivata prima rispetto a tempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2t + \frac{dw(t)}{dt} = 0$$

Il tempo a cui si trova il minimo ha dunque la seguente espressione:

$$t = -\frac{1}{2}\frac{dw(t)}{dt}$$

Il valor medio e il valore quadratico medio di $\frac{dw(t)}{dt}$ si trovano facilmente notando che la derivata di un segnale si ottiene facendo passare il segnale attraverso un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = j2\pi f$. Quindi:

$$E\left[\frac{dw(t)}{dt}\right] = E[w(t)]H(0) = 0$$

$$S_{\frac{dw(t)}{dt}}(f) = S_{w(t)}(f)\left|H(f)\right|^2 = \frac{\sigma_w^2}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right) \cdot 4\pi^2 f^2$$

$$E\left[\left|\frac{dw(t)}{dt}\right|^2\right] = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\sigma_w^2}{B} 4\pi^2 f^2 df = \frac{\sigma_w^2}{B} 4\pi^2 \frac{B^3}{12} = \frac{\sigma_w^2}{3}\pi^2 B^2$$

Da cui il risultato cercato:

$$E[t] = 0$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma_w^2}{12}\pi^2 B^2$$