TELECOMUNICAZIONI primo appello - 8 Luglio 2013

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)=\frac{\sin(20\pi t)}{\pi t}\cos(10\pi t)$.

a [6/30]- Si tracci il grafico della risposta in frequenza *H(f)*

b [4/30]- All'ingresso del sistema dato si pone il segnale $x(t)=\left[\frac{\sin(15\pi t)}{\pi t}\right]^2$.

Si tracci il grafico della trasformata di Fourier dell'uscita *y(t)*.

c [4/30]- Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)*.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t)=\sin^3(2\pi t)$

a [6/30]- Si trovi il massimo intervallo T con cui campionare *x(t)* per evitare alias in frequenza.

b [4/30]**-** Si calcoli la DFT di $x_n = x\left(n\frac{T}{2}\right)$ con $0 \le n \le 59$

c [4/30]**-** Si calcoli la DFT di $x_n = x(nT)$ con $0 \le n \le 59$

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n la cui densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)$ è lineare tra 0 e 1. I campioni del processo sono tra loro indipendenti.

a [8/30]- Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze $p_x(a)$ e si calcoli la densità spettrale di potenza $S_x(\phi)$.

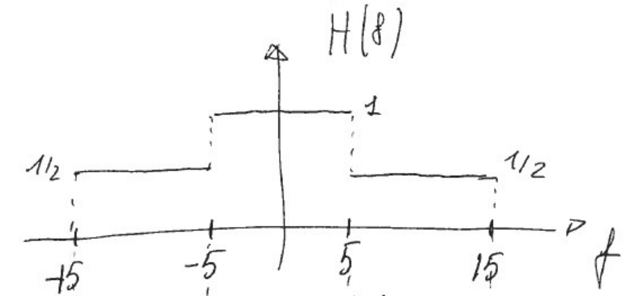
b [4/30]– I campioni del processo casuale x_n vengono elaborati con una media mobile eseguita su 2 campioni consecutivi di x_n ottenendo il processo filtrato $y_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} x_{n-k}$. Si calcoli l'autocorrelazione di y_n.

TELECOMUNICAZIONI primo appello - 8 Luglio 2013

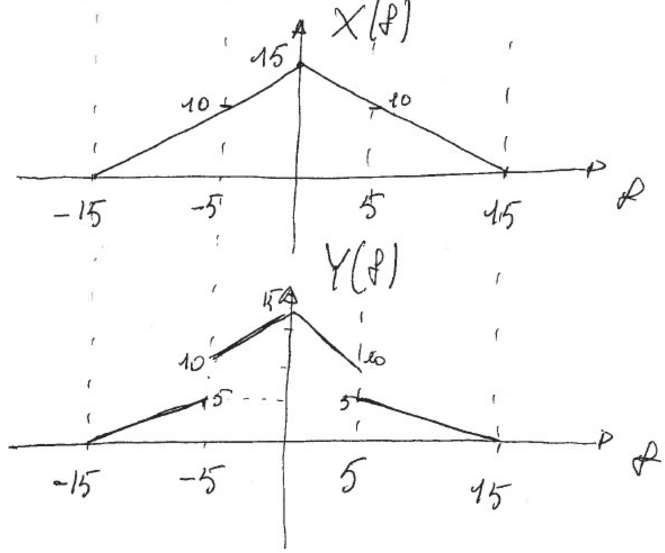
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a)

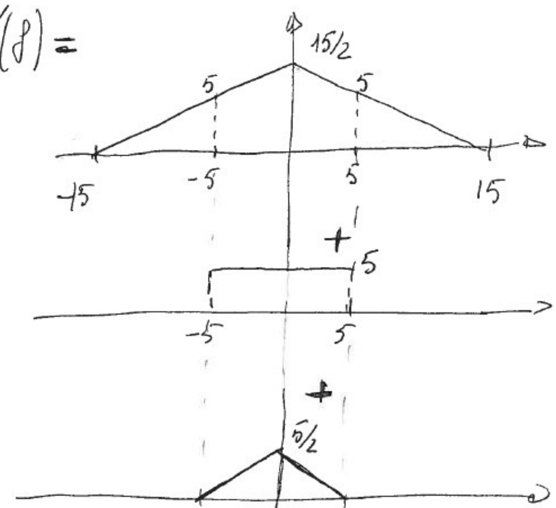


b)



c)

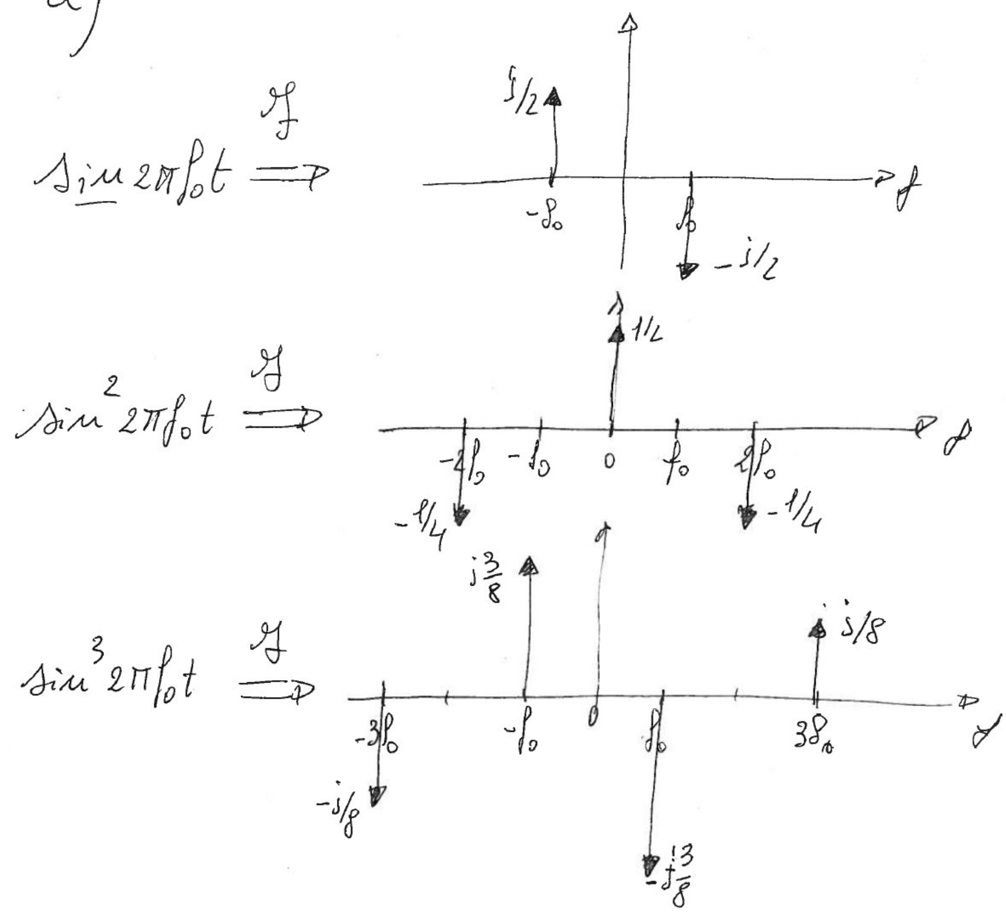
$Y(f) =$



$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \pi 15 t}{\pi t}\right)^2 + 5 \cdot \frac{\sin \pi 10 t}{\pi t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \pi 5 t}{\pi t}\right)^2$$

ESERCIZIO 2

a)



$f_{max} = 3f_0 \qquad f_s > 6f_0 \qquad T < \frac{1}{6f_0}$

N.B. Dalla Trasformata di $\sin^3(2\pi f_0 t)$ si evince che $\sin^3(2\pi f_0 t) = \frac{3}{4}\sin(2\pi f_0 t) - \frac{1}{4}\sin(6\pi f_0 t)$

Posto $f_o = 1$ si ottiene $T < \frac{1}{6}$.

b – Se si utilizza un intervallo di campionamento pari a $\frac{T}{2}$ non c'e' alias in frequenza:

$$x_n = \frac{3}{4}\sin\left(2\pi\frac{n}{12}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(2\pi\frac{n}{4}\right)$$

In 60 campioni ci sono esattamente 5 cicli della prima e 15 cicli della seconda sinusoide. Quindi:

$$X_k = -j\frac{45}{2}\delta_{k-5} + j\frac{45}{2}\delta_{k-55} + j\frac{15}{2}\delta_{k-15} - j\frac{15}{2}\delta_{k-45}$$

c – Se si utilizza un intervallo di campionamento pari a T siamo al limite dell'alias in frequenza:

$$x_n = \frac{3}{4}\sin\left(2\pi\frac{n}{6}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(2\pi\frac{n}{2}\right)$$

In 60 campioni ci sono esattamente 10 cicli della prima e 30 cicli della seconda sinusoide. Quindi:

$$X_k = -j\frac{45}{2}\delta_{k-10} + j\frac{45}{2}\delta_{k-50} + j\frac{15}{2}\delta_{k-30} - j\frac{15}{2}\delta_{k-30} = j\frac{45}{2}\delta_{k-10} + j\frac{45}{2}\delta_{k-50}$$

ESERCIZIO 3

a – I campioni del processo sono tra loro indipendenti quindi la funzione di autocorrelazione ha la seguente forma generale:

$$R_x[m] = \sigma_x^2\delta_m + |m_x|^2$$

Dalla densità di probabilità delle ampiezze, che vale $p_x(a) = 2a$ con $0 \le a \le 1$, si ricava che:

$$m_x = \int_0^1 a p_x(a) da = 2\int_0^1 a^2 da = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_x^2 = \int_0^1 a^2 p_x(a) da - |m_x|^2 = 2\int_0^1 a^3 da - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

La densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione diventa:

$$S_x(\phi) = \frac{1}{18}rect(\phi) + \frac{4}{9}\delta(\phi)$$

b - Si nota che:

$$y_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} x_{n-k} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) = x_n * \frac{1}{2}(\delta_n + \delta_{n-1})$$

L'autocorrelazione dell'uscita di questo sistema LTI vale:

$$R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\frac{1}{18}\delta_m + \frac{4}{9}\right) * \left(\frac{1}{2}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1}\right) = \frac{1}{36}\delta_m + \frac{1}{72}\delta_{m-1} + \frac{1}{72}\delta_{m+1} + \frac{4}{9}.$$