Corso di Telecomunicazioni - Esame del 6 Luglio 2009

Esercizio 1. *Segnali e sistemi.*

Si consideri il sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $y(t) = x(t) + x(t - T)$, con $T = 1$ms.

a. Si calcoli la risposta in frequenza $H(f) = Y(f)/X(f)$ e se ne rapprenti graficamente il modulo.

b. Si consideri il segnale periodico $x(t)$ in Fig. 1 di periodo T_0 =2ms. Si calcoli e si rappresenti graficamente la trasformata di Fourier di $x(t)$.

c. Si calcoli l'uscita $y(t)$ quando all'ingresso viene imposto il segnale $x(t)$ del punto *b*.

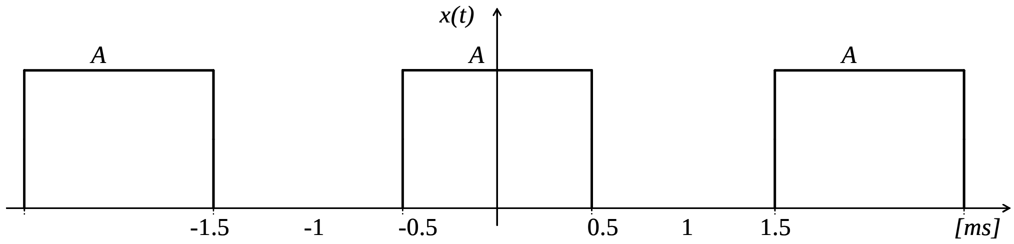

Figura 1:

Esercizio 2. *Processi casuali discreti.*

Sia dato il processo casuale stazionario Gaussiano x_n, con campioni indipendenti, valore medio nullo e varianza σ_x^2 =3W.

a. Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo $\bar{R}_x[m]$.

b. Il processo x_n viene applicato all'ingresso di un filtro con risposta all'impulso $h_n = \delta_m + \delta_{m-1}$ generando in uscita il processo y_n. Si calcoli l'autocorrelazione $\bar{R}_y[m]$ di y_n.

c. Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo y_n.

Esercizio 3. *Quantizzazione e codifica di sorgente.*

Si vuole rappresentare in forma numerica il processo casuale $x(t)$ di banda B =4kHz e densità di probabilità delle ampiezze rappresentata in Fig. 2 (A è da calcolare). La conversione è ottenuta campionando il segnale (con frequenza minima tale da garantire la ricostruzione del segnale continuo a partire dai campioni) ed effettuando una quantizzazione uniforme delle ampiezze dei campioni con $M = 4$ livelli.

a. Si calcoli il bit-rate d'uscita, assumendo che ciascun livello venga rappresentato con lo stesso numero di bit.

b. Si valuti la potenza media P_x di $x(t)$, la potenza media del rumore di quantizzazione P_q (assumendo la distribuzione del rumore di quantizzazione uniforme), e il rapporto SNR=$\frac{P_x}{P_q}$ espresso in dB. Si ricorda che $P_x = \mathrm{E}[x(t)^2] = \int a^2 p_x(a)da$.

c. Si calcoli il bit-rate minimo ottenibile in base all'entropia di sorgente.

d. Si valuti il bit-rate ottenuto con una codifica di sorgente più efficiente che associa ai quattro livelli (in ordine di probabilità) le stringhe di bit: "0","10", "110","111".

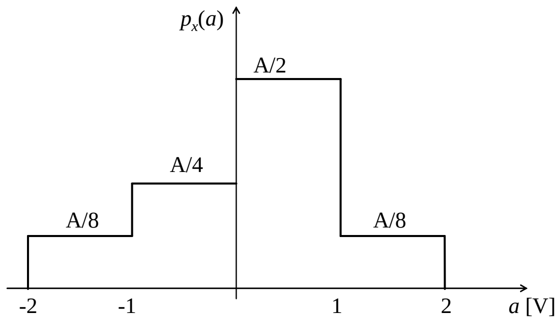

Figura 2:

Soluzioni - Esame del 6 Luglio 2009

Soluzione Esercizio 1

a. La risposta in frequenza del sistema si calcola come nel seguito:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) + X(f)\exp(-j2\pi fT) = X(f)[1+\exp(-j2\pi fT)] \\ H(f) &= [1+\exp(-j2\pi fT)] \\ &= 2\cos(\pi fT)\exp(-j\pi fT) \\ |H(f)| &= 2 \times |\cos(\pi fT)| \end{aligned}$$

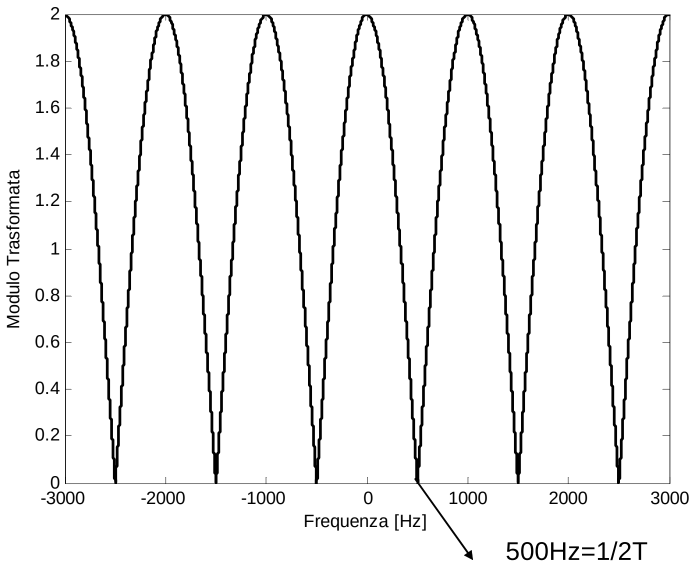

Figura 3:

Il modulo della trasformata e' mostrato in Fig. 3, si noti che $H(0) = 2$

b. Occorre per prima cosa calcolare la trasformata di Fourier $X_0(f)$ del periodo base:

$$x_0(t) = A \times rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

ovvero:

$$X_0(f) = A\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$$

La trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale periodico $x(t)$ di periodo $T_0 = 2T$ si ottiene campionando la trasformata del periodo base con frequenza di campionamento $1/T_0$ e scalando il risultato per $1/T_0$:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{T_0}X_0(f) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_0\left(\frac{k}{2T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{2T}\right) = \\ &= A\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} \times \delta\left(f - \frac{k}{2T}\right) \\ &= \frac{A}{2} \times \delta(f) + \frac{A}{\pi}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{A}{\pi}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right) - \frac{A}{3\pi}\delta\left(f - \frac{3}{2T}\right) - \frac{A}{3\pi}\delta\left(f + \frac{3}{2T}\right) + ... \end{aligned}$$

La trasformata è mostrata in figura 4, si noti che gli impulsi di ampiezza non-nulla sono posizionati alle frequenze $f = 0$, $f = \pm\frac{k}{2T}$, con k dispari.

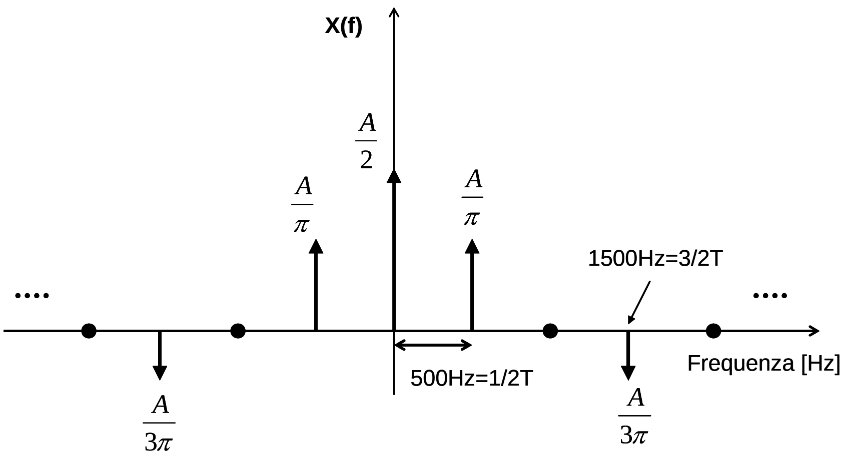

Figura 4:

c. Poiché la risposta in frequenza $H(f)$ presenta zeri alle frequenze $k/2T$ per $k \neq 0$ dispari, la trasformata di Fourrier dell'uscita $Y(f) = H(f)X(f)$ e' costituita da un solo impulso nell'origine:

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(0) \times \frac{A}{2} \times \delta(f) = A \times \delta(f) \\ y(t) &= A \end{aligned}$$

Il medesimo risultato si poteva trovare direttamente nel dominio del tempo sommando a $x(t)$ la versione traslata $x(t-T)$.

Soluzione Esercizio 2

a. $R_x[m] = 3\delta_m$.

b. L'autocorrelazione dell'uscita è $\bar{R}_y[m] = 3r_h[m]$ con $r_h[m]$ autocorrelazione della risposta all'impulso del filtro: $r_h[m] = h_m * h_{-m} = 2\delta_m + \delta_{m-1} + \delta_{m+1}$.

c. Il processo d''uscita è Gaussiano con media nulla e varianza $\bar{R}_y[0] = 6$W. Dunque:

$$p_y(a) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{12}\right).$$

Soluzione Esercizio 3

a. Il processo $x(t)$ è campionato con frequenza $f_c = 2B$ campioni/s ottenendo il processo discreto $x[n]$. I campioni $x_q[n]$ all'uscita del quantizzatore uniforme sono ottenuti approssimando $x[n]$ con il livello più vicino fra i quattro livelli:

$$x_q[n] \in \{-1.5, -0.5, +0.5, +1.5\}\ \mathrm{V}$$

Dato che ciascun livello è rappresentato con lo stesso numero di bit, $K = \log_2(M) = 2$bit/campione, il bit-rate d'uscita con frequenza di campionamento $2B = 8$kHz e $K = \log_2 M = 2$ bit/campione:

$$R = 8\mathrm{k} \times 2 = 16\mathrm{kbit/s}.$$

b. Poiché $\int p_x(a)da = 1$ deve essere:

$$A\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = 1 \rightarrow A = 1.$$

La potenza di $x(t)$ è:

$$\begin{aligned} P_x &= E[x^2] = \int a^2 p_x(a)da \\ &= \frac{1}{8}\int_{-2}^{-1} a^2 da + \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} a^2 da + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} a^2 da + \frac{1}{8}\int_{1}^{2} a^2 da \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{7}{3} = \frac{5}{6}\mathrm{W} \end{aligned}$$

La potenza del rumore di quantizzazione P_q (distribuzione uniforme) si calcola come

$$P_q = \frac{\Delta^2}{12}$$

dove Δ è l'intervallo di quantizzazione (quanto):

$$\Delta = \frac{4}{M} = 1\text{V}.$$

Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione è:

$$\text{SNR} = \frac{5/6}{\frac{1}{12}} = 10 = 10\text{dB}$$

c. Le probabilità di ciascun livello in uscita al quantizzatore valgono (si ricordi che $A = 1$)

$$\begin{aligned}
p_1 &= \Pr[x_q[n] = -1.5] = \Pr[-2 \leq x(t) \leq -1] = 1/8 \\
p_2 &= \Pr[x_q[n] = -0.5] = \Pr[-1 \leq x(t) \leq 0] = 1/4 \\
p_3 &= \Pr[x_q[n] = +0.5] = \Pr[0 \leq x(t) \leq 1] = 1/2 \\
p_4 &= \Pr[x_q[n] = +1.5] = \Pr[1 \leq x(t) \leq 2] = 1/8
\end{aligned}$$

L'entropia della sorgente $x_q[n]$ è

$$H = \sum_{n=1}^{4} p_n \log_2 \frac{1}{p_n} = \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{8} \times 3 = 1.75 \text{ bit/campione}$$

Il bit-rate medio minimo ottenibile vale:

$$\bar{R}_b > H \times 2B = 8 \times 1.75 = 14\text{kbit/s}$$

d. Il numero medio di bit per campione (livello) in uscita dal quantizzatore uniforme sulla base della codifica

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1/8 \rightarrow'' 110'' \\
p_2 &= 1/4 \rightarrow'' 10'' \\
p_3 &= 1/2 \rightarrow'' 0'' \\
p_4 &= 1/8 \rightarrow'' 111''
\end{aligned}$$

è:

$$E[K] = 3 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{8} = 1.75 \text{ bit/campione}$$

cui corrisponde il bit-rate medio minimo calcolato al punto c.