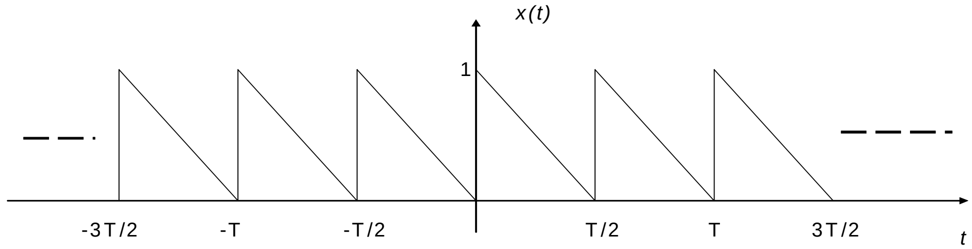
TELECOMUNICAZIONI primo appello (Prati) - 1 Luglio 2008

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
ATTENZIONE!!: DOPO LA VALUTAZIONE DELLO SCRITTO SI SVOLGERA' UN BREVE COLLOQUIO ORALE RISERVATO AI SUFFICIENTI A DISCREZIONE DEL DOCENTE PER DETERMINARE IL VOTO FINALE
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 20min.

ESERCIZIO 1 [peso 1.2]

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$.

a - Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$ e se ne tracci un grafico qualitativo.
b - Si calcoli l'uscita del sistema quando all'ingresso si pone il seguente segnale periodico $x(t)$:



ESERCIZIO 2 [peso 1]

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = 1 + \left(\frac{\sin \pi 20t}{\pi t}\right)^2$

a - Si calcoli il massimo valore dell'intervallo di campionamento T per evitare alias in frequenza.
b – Si campioni il segnale dato con intervallo di campionamento 2T (doppio del valore trovato al punto precedente) e si calcoli la trasformata di Fourier del segnale campionato in frequenza e in frequenza normalizzata.

ESERCIZIO 3 [peso 1]

Sia dato il processo casuale reale *x(t)* gaussiano a valor medio unitario con potenza P=2, bianco nella banda da -5Hz a +5Hz.

a - Si calcoli l'autocorrelazione del processo *x(t)*
b - Si calcoli l'autocorrelazione del processo casuale $y(t)$ ottenuto filtrando il processo *x(t)* con un filtro passa-alto ideale che elimina le componenti spettrali comprese tra -3Hz a +3Hz

ESERCIZIO 4 [peso 0.6]

Dato il segnale discreto x_n con ampiezze dei campioni distribuite linearmente tra 0 e 16 (in 0 la densita' di probabilita' e' nulla), si forma la sorgente numerica di 4 livelli quantizzando uniformemente x_n.

a [3]- Si calcoli l'entropia della sorgente.
b [**3]-** Si calcoli il numero di bit per livello che si ottengono con una codifica di Huffman.

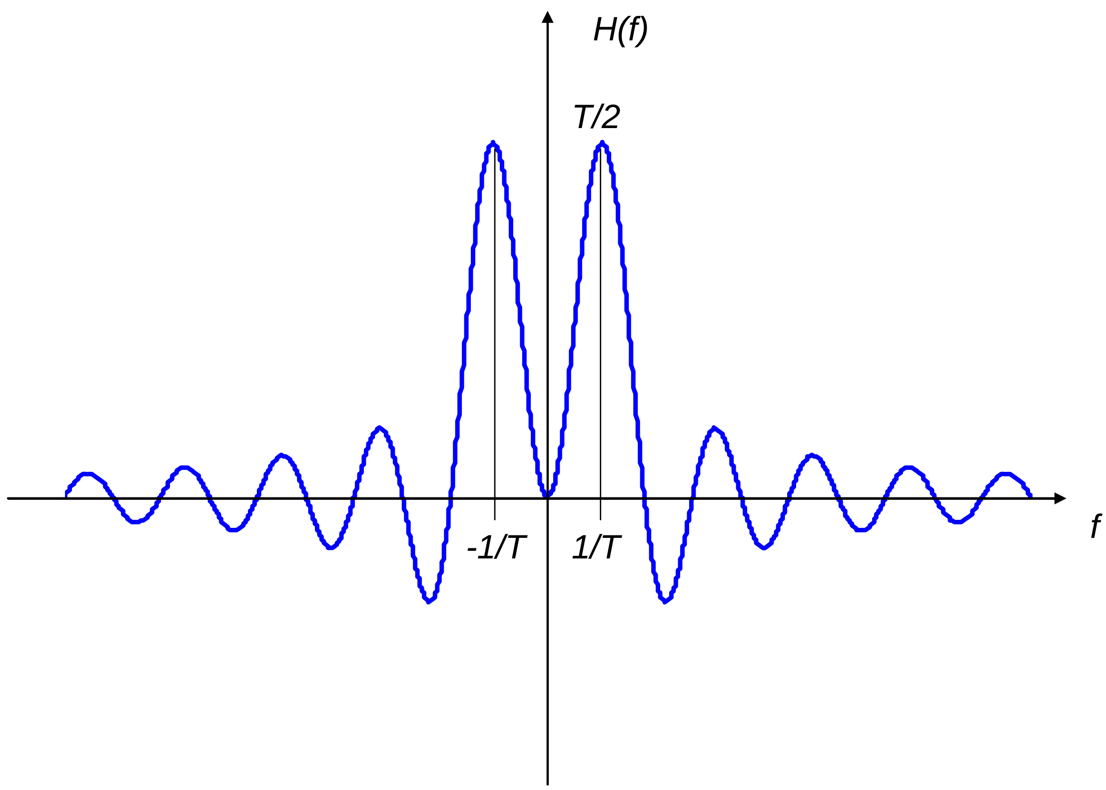
TELECOMUNICAZIONI primo appello (Prati) - 1 Luglio 2008

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza e' costituita dalla somma di 2 seni cardinali traslati rispettivamente di 1/T e -1/T:

$$H(f) = \frac{1}{2}\frac{\sin \pi T\left(f - \frac{1}{T}\right)}{\pi\left(f - \frac{1}{T}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\sin \pi T\left(f + \frac{1}{T}\right)}{\pi\left(f + \frac{1}{T}\right)}$$



b – Il segnale *x(t)* di figura ha periodo T/2, quindi le uniche componenti spettrali sono alle frequenze multiple intere della fondamentale 2/T.

La risposta in frequenza del sistema dato e' nulla nell'origine e alle frequenze multiple intere di 1/T tranne alle frequenze 1/T e -1/T. A queste 2 frequenze il segnale d'ingresso non ha componenti spettrali e quindi l'uscita e' nulla.

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale e' costituita da un impulso di area unitaria nell'origine piu' un triangolo di banda 40Hz e altezza 20 centrato nell'origine. La minima frequenza di campionamento e' dunque 40Hz e il massimo intervallo di campionamento per evitare alias in frequenza vale T=25ms.

b –Campionando con intervallo di campionamento 50ms s'introduce alias in frequenza. Il risultato dell'alias e' una costante 400 e un impulso di area 20 nell'origine.
Dunque:
$\tilde{X}(f) = 400 + 20\delta(f)$ periodica di periodo 20
Passando alla frequenza normalizzata si ottiene:
$X(\phi) = 400 + \delta(\phi)$ periodica di periodo 1

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema:

$$S_x(f) = \delta(f) + \frac{1}{10} rect\left(\frac{f}{10}\right)$$

$$R_x(\tau) = 1 + \frac{1}{10}\frac{\sin \pi 10\tau}{\pi\tau}$$

b - La densita' spettrale di potenza dell'uscita e' data in generale dalla nota formula:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

Nel nostro caso l'impulso scompare (infatti il valor medio dell'uscita e' nullo) e della densita' spettrale dell'ingresso rimangono 2 rettangoli alti 1/10 di banda 2Hz centrati rispettivamente intorno alle frequenze 4 e -4.
L'autocorrelazione dell'uscita si trova antitrasformando:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{5}\frac{\sin \pi 2\tau}{\pi\tau}\cos(8\pi\tau)$$

ESERCIZIO 4

a - Le probabilita' dei 4 livelli della sorgente data si calcolano immediatamente e valgono:

V_1 p=1/16
V_2 p=3/16
V_3 p=5/16
V_4 p=7/16

Il valore dell'entropia H della sorgente numerica si calcola dalla definizione:

$$H = \sum_{i=1}^{4} - p_i \log_2(p_i) = -\frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{3}{16}\log_2\left(\frac{3}{16}\right) - \frac{5}{16}\log_2\left(\frac{5}{16}\right) - \frac{7}{16}\log_2\left(\frac{7}{16}\right) \approx 1.749 \text{ bit/simbolo}$$

b - una possibile codifica di Huffman ci dice:

V_1 000
V_2 001
V_3 01
V_4 1

Bit per simbolo = $\frac{7}{16} + \frac{10}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{29}{16} = 1.8125$