Segnali per le Telecomunicazioni - Primo appello (Prati) - 5 Luglio 2010

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 30min.

Ordinamento 509

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con la risposta all'impulso $h(t) = rect\left[\frac{1}{20}(t-10)\right]$.

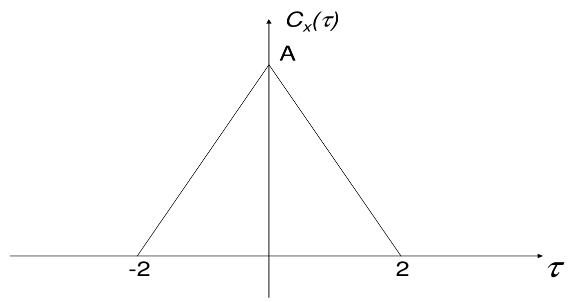
a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza *H(f)*.
b - Si calcoli l'espressione dell'uscita del sistema *y(t)* quando l'ingresso e' dato dal segnale $x(t) = \cos^2\left(2\pi \frac{t}{40}\right)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = 1 - \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t} + \cos\left(2\pi \frac{B}{4} t\right)$.

a - Si trovi il massimo valore di T per evitare alias in frequenza e si consideri la sequenza $x_n = x(nT)$.
b - Si traccino i grafici della trasformata di Fourier *X(f)* del segnale *x(t)* e della trasformata in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n.
c – Si calcoli l'espressione della DFT di 100 campioni di x_n con $0 \le n \le 99$.

ESERCIZIO 3

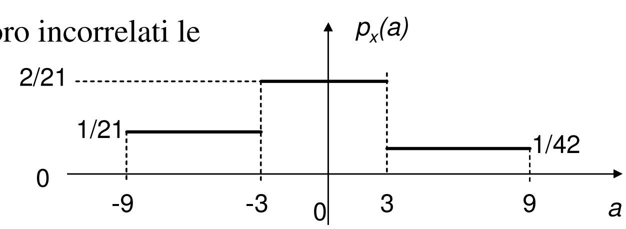


Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze uniforme nell'intervallo -2 ~ +10 e autocovarianza triangolare mostrata in figura.

a - Si calcoli il valore di **A**.
b – Si calcoli valor medio e l'autocorrelazione del processo casuale $y(t) = x(t) + x(t-1)$. Quanto vale $R_y(0)$?

ESERCIZIO 4

Sia dato il processo casuale discreto x_n con campioni tra loro incorrelati le cui ampiezze hanno la densita' di probabilita' mostrata in figura.



a - Il segnale x_n viene quantizzato uniformemente con *M=6* livelli. Si calcoli il valore dell'entropia *H* della sorgente numerica cosi' ottenuta.
b - Si trovi una ragionevole codifica binaria della sorgente numerica trovata al punto precedente e si ricavi il numero medio di bit per simbolo necessario alla codifica.

Segnali per le Telecomunicazioni - Primo appello (Prati) - 5 Luglio 2010

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 30min.

Ordinamento 270

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con la risposta all'impulso $h(t) = rect\left[\frac{1}{20}(t-10)\right]$.

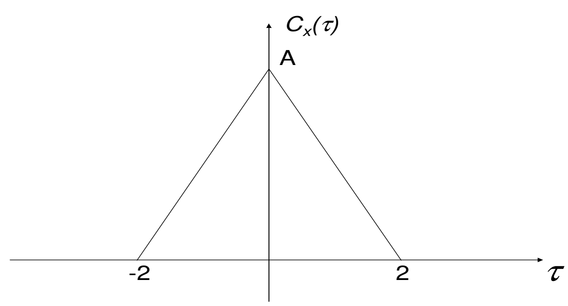
a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza *H(f)*.
b - Si calcoli l'espressione dell'uscita del sistema *y(t)* quando l'ingresso e' dato dal segnale $x(t) = \cos^2\left(2\pi\frac{t}{40}\right)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo $x(t) = 1 - \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t} + \cos\left(2\pi\frac{B}{4}t\right)$.

a - Si trovi il massimo valore di T per evitare alias in frequenza e si consideri la sequenza $x_n = x(nT)$.
b - Si traccino i grafici della trasformata di Fourier *X(f)* del segnale *x(t)* e della trasformata in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n.
c – Si calcoli l'espressione della DFT di 100 campioni di x_n con $0 \le n \le 99$.

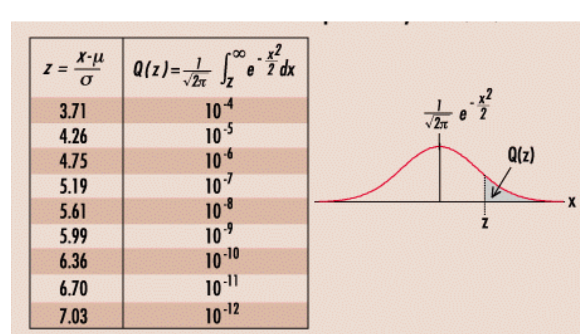
ESERCIZIO 3



Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario con densita' di probabilita' delle ampiezze uniforme nell'intervallo -2 ~ +10 e autocovarianza triangolare mostrata in figura.
a - Si calcoli il valore di **A**.
b – Si calcoli valor medio e l'autocorrelazione del processo casuale $y(t) = x(t) + x(t-1)$. Quanto vale $R_y(0)$?

ESERCIZIO 4

Si consideri un canale di trasmissione con banda passante di 2MHz e attenuazione di 70dB.
a - Si calcoli la massima cadenza teorica di bit R_b che si può trasmettere con una modulazione PAM binaria con interferenza intersimbolica nulla.
b - Si calcoli la massima densita' spettrale di potenza del rumore al ricevitore che consentirebbe di sbagliare un bit al giorno in media trasmettendo 1W di potenza e utilizzando ampiezze opposte per rappresentare 0 e 1.



$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$	$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
3.71	10^{-4}
4.26	10^{-5}
4.75	10^{-6}
5.19	10^{-7}
5.61	10^{-8}
5.99	10^{-9}
6.36	10^{-10}
6.70	10^{-11}
7.03	10^{-12}

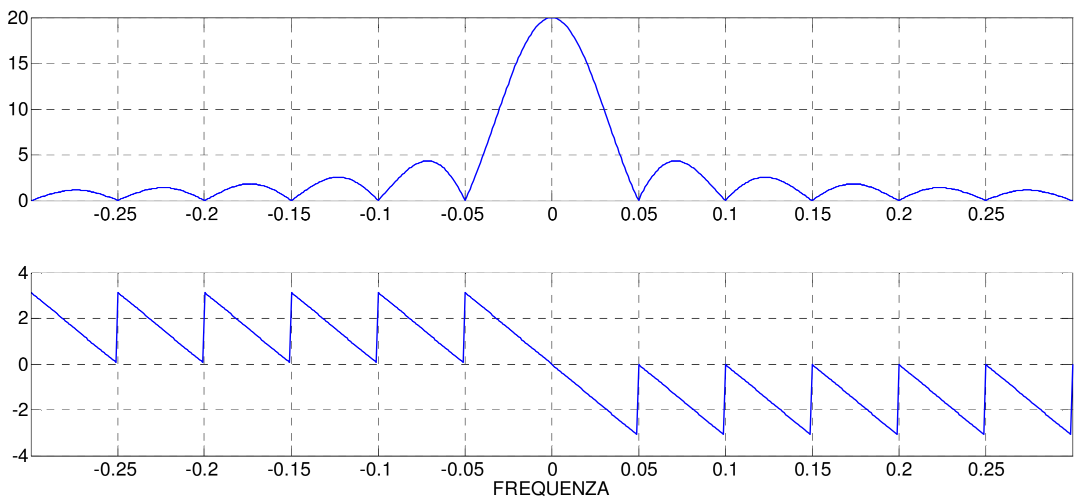
TELECOMUNICAZIONI primo appello (Prati) - 5 Luglio 2010

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta all'impulso *h(t)* e' un rettangolo di ampiezza unitaria nell'intervallo $0 \le t \le 20$. La sua trasformata vale:

$$X(f) = \frac{\sin(20\pi f)}{\pi f} \exp\{-j20\pi f\}$$



Nel calcolo della fase bisogna fare attenzione ai valori negativi del seno cardinale che aggiungono o tolgono π ai valori di fase dati dall'esponenziale complesso.

b – Nelle frequenze abbiamo:

$$Y(f) = X(f)H(f) =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{20}\right)\right] \frac{\sin(20\pi f)}{\pi f} \exp\{-j20\pi f\} =$$
$$= \frac{1}{2}\delta(f) \frac{\sin(20\pi f)}{\pi f} \exp\{-j20\pi f\} = 10\delta(f)$$

Antitrasformando si ottene *y(t)*=10.

ESERCIZIO 2

a - La massima frequenza del segnale reale è $f_{\max} = \frac{B}{2}$. Il teorema del campionamento dice che occorre campionare con frequenza di campionamento almeno doppia: $f_s = B$ e quindi $T = \frac{1}{B}$.

b – La trasformata di Fourier *X(f)* del segnale *x(t)* ha la seguente espressione:

$$X(f)=\delta(f)-rect\left(\frac{f}{B}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{B}{4}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{B}{4}\right)$$

La trasformata in frequenza normalizzata $X(\phi)$ della sequenza x_n ha la seguente espresione:

$$X(\phi)=\delta(\phi)-B\cdot rect(\phi)+\frac{1}{2}\delta\left(\phi-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(\phi+\frac{1}{4}\right)$$ periodica di periodo unitario.

c – Se si campiona $x(t)$ con intervallo di campionamento $T=\frac{1}{B}$, si ottiene la seguente sequenza:

$$x_n=x(nT)=x\left(\frac{n}{B}\right)=1-\frac{\sin\left(\pi B\frac{n}{B}\right)}{\pi\frac{n}{B}}+\cos\left(2\pi\frac{B}{4}\frac{n}{B}\right)=1-B\frac{\sin(\pi n)}{\pi n}+\cos\left(2\pi\frac{n}{4}\right)=1-B\delta_n+\cos\left(2\pi\frac{n}{4}\right)$$

L'espressione della DFT di 100 campioni di x_n con $0\le n\le 99$ e' data da una costante (DFT dell'impulso) piu' un impulso nell'origine (DFT della costante) piu' altri 2 impulsi (DFT di 25 cicli esatti di coseno):

$$X_k=100\delta_k-B+50\delta_{k-25}+50\delta_{k-75}$$

ESERCIZIO 3

a – La costante **A** si trova immediatamente sapendo che la densita' di probabilita' delle ampiezze del processo casuale dato e' uniforme e notando che

$$A=C_x(0)=\sigma_x^2=\frac{\Delta^2}{12}=\frac{144}{12}=12$$

b - Il valor medio e l'autocorrelazione del processo casuale *y(t)* si ottengono dalla definizione:

$$m_y=E[y(t)]=E[x(t)+x(t-1)]=E[x(t)]+E[x(t-1)]=4+4=8$$

$$\begin{aligned}
R_y(\tau)&=E[y(t)y(t+\tau)]=E[\{x(t)+x(t-1)\}\{x(t+\tau)+x(t-1+\tau)\}]=\\
&E[x(t)x(t+\tau)]+E[x(t-1)x(t-1+\tau)]+E[x(t-1)x(t+\tau)]+E[x(t)x(t-1+\tau)]=\\
&=R_x(\tau)+R_x(\tau)+R_x(\tau+1)+R_x(\tau-1)=\\
&=2R_x(\tau)+R_x(\tau+1)+R_x(\tau-1)
\end{aligned}$$

Sapendo che $R_x(\tau)=C_x(\tau)+16$ si ottiene facilmente il valore richiesto:

$$R_y(0)=2R_x(0)+R_x(1)+R_x(-1)=2R_x(0)+2R_x(1)=2C_x(0)+32+2C_x(1)+32=100$$

In alternativa si puo' immaginare che il processo casuale *y(t)* sia ottenuto filtrando il processo casuale *x(t)* con la risposta all'impulso $h(t)=\delta(t)+\delta(t+1)$. Valor medio e autocorrelazione si ottengono applicando le note formule dei processi casuali attraverso sistemi LTI.

ESERCIZIO 4 (ordinamento 509)

a - Il segnale x_n viene quantizzato uniformemente con M=6 livelli che quindi valgono -7.5, -4.5, -1.5, 1.5, 4.5, 7.5. Il valore dell'entropia H della sorgente numerica cosi' ottenuta si calcola dalla definizione:

$$H=\sum_{i=1}^{3}-p_i\log_2(p_i)=2\left\{-\frac{3}{21}\log_2\left(\frac{3}{21}\right)-\frac{6}{21}\log_2\left(\frac{6}{21}\right)-\frac{3}{42}\log_2\left(\frac{3}{42}\right)\right\}\approx 2.38 \text{ bit/livello}$$

c - La piu' semplice codifica binaria della sorgente numerica trovata al punto precedente si ricava come codice di Huffmann: 10 11 01 001 0001 1111. Da cui 2.43 bit/livello.

ESERCIZIO 4 (ordinamento 270)

a - La massima cadenza di bit vale $R_b=2B=4Mbit/s$

b - La probabilità di errore di bit necessaria rispettare la specifica di progetto vale:

$$P(\varepsilon_b)=\frac{1}{(4\cdot 10^6)\cdot(3600)\cdot(24)}\approx 2.9\cdot 10^{-12}$$

Supponendo di utilizzare il filtro adattato in ricezione il legame tra probabilità di errore di bit e il rapporto energia ricevuta del bit e densità spettrale di potenza di rumore è:

$$P(\varepsilon_b)=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)=\ 2.9\cdot 10^{-12}$$

Dalle tabelle della funzione errore complementare riportate nel testo si trova che

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\approx 7$$

Quindi:

$$N_0\approx\frac{2}{49}E_b=\frac{2}{49}P_R T_b=\frac{2}{49}\frac{P_T\cdot 10^{-7}}{R_b}=\frac{2}{49}\frac{1\cdot 10^{-7}}{4\cdot 10^{6}}\approx 10^{-15}\text{ W/Hz}$$