SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
appello del 4 Luglio 2012

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 00min.

ESERCIZIO 1

a [6] - Si traccino i grafici di modulo e fase delle seguenti trasformate di Fourier

$$X(f) = rect\left(\frac{f-B}{B}\right)\exp\left\{j2\pi\frac{f-B}{B}\right\} \;;\quad Y(f) = rect\left(\frac{f-B}{B}\right)\exp\left\{j2\pi\frac{f}{B}\right\}$$

b [4] - Si calcolino, le espressioni dei segnali $x(t)$ e $y(t)$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \cos^2(2\pi f_o t)\cos(4\pi f_o t)$ che viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 3f_o$.

a [3] – Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale tempo continuo $x(t)$.
b [3] – Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale del segnale campionato x_n.
c [2] –Si calcoli la DFT dei primi 60 campioni del segnale campionato x_n (n da 0 a 59).
d [2] –Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito da x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario $x(t)$ bianco nella banda di frequenze ± 864 Hz con densità di probabilità uniforme tra -62 e 82.
Il processo $x(t)$ viene convoluto con $h(t) = 4\frac{\sin \pi 200(t+1)}{\pi(t+1)}$, ottenendo il processo casuale $y(t)$.

a [7] – Si calcoli l'autocovarianza, il valor medio e la potenza del processo $y(t)$.
b [3] – Il processo $y(t)$ viene campionato con intervallo di campionamento $T = 1ms$, ottenendo il processo discreto y_n. I campioni di y_n vengono quantizzati con 16 livelli. L'entropia della sorgente numerica così ottenuta è uguale o minore di 4bit/simbolo? Perchè?

TELECOMUNICAZIONI appello del 4 Luglio 2012

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – Le trasformate di Fourier date sono tra loro uguali perchè

$$\exp\left\{ j2\pi \frac{f-B}{B} \right\} = \exp\left\{ j2\pi \frac{f}{B} - j2\pi \right\} = \exp\left\{ j2\pi \frac{f}{B} \right\}$$

Il modulo di $X(f)$ è un rettangolo di altezza unitaria e base $\frac{B}{2} < f < \frac{3B}{2}$. La fase è lineare con pendenza $\frac{2\pi}{B}$ nulla in $f = B$.

b - Il segnale $x(t) = y(t)$ ha la seguente espressione:

$$x(t) = \frac{\sin\left(\pi B\left(t + \frac{1}{B}\right)\right)}{\pi\left(t + \frac{1}{B}\right)} \exp\{ j2\pi Bt \}$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale e' data da

$$X(f)=\frac{1}{4}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f\pm 2f_o)+\frac{1}{8}\delta(f\pm 4f_o)$$

la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza è dunque $8f_o$.

b – La frequenza di campionamento utilizzata è $3f_o$ e quindi s'introduce alias in frequenza. La trasformata di Fourier del segnale campionato è periodica di periodo $3f_o$ e vale:

$$X(f)=3f_o\left[\frac{1}{4}\delta(f)+\frac{3}{8}\delta(f\pm f_o)\right]$$

In frequenza normalizzata:

$$X(\phi)=\left[\frac{1}{4}\delta(\phi)+\frac{3}{8}\delta\left(\phi\pm\frac{1}{3}\right)\right]$$

c – Il segnale campionato ha la seguente espressione:

$$x_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

La DFT dei primi 60 campioni ha dunque la seguente espressione:

$$X_k=\frac{60}{4}\delta_k+60\frac{3}{8}\delta_{k-20}+60\frac{3}{8}\delta_{k-40}$$

d – Il segnale tempo continuo ricostruito ha la seguente espressione:

$$x_R(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(2\pi f_o t)$$

ESERCIZIO 3

a – Dai dati del problema la varianza del processo continuo è $\sigma_x^2 = \frac{144^2}{12} = 12^3$, il valor medio $m_x = 10$ e la densità spettrale di potenza $S_x(f) = \frac{12^3}{864 \cdot 2} rect\left(\frac{f}{864 \cdot 2}\right) + 100\delta(f) = rect\left(\frac{f}{1728}\right) + 100\delta(f)$

La densità settrale di potenza del processo filtarto è:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[rect\left(\frac{f}{1728}\right) + 100\delta(f)\right] \cdot 16 rect\left(\frac{f}{200}\right) = 16 rect\left(\frac{f}{200}\right) + 1600\delta(f)$$

L'autocorrelazione del processo filtrato vale:

$$R_y(\tau) = 16\frac{\sin \pi 200t}{\pi t} + 1600$$

Il valor medio del processo filtrato vale $m_y = 40$ e la potenza $P_y = R_y(0) = 4800$.

b - Il coefficiente di correlazione del processo è:

$$\rho_y[m] = \frac{C_y[m]}{3200} = \frac{\sin \pi \frac{m}{5}}{\pi \frac{m}{5}}$$

Il campioni di y_n sono correlati tra loro e lo saranno anche i livelli di quantizzazione (simboli elementari della sorgente numerica). Si possono quindi formare simboli di ordine superiore (aggregati di simboli elementari) sicuramente non piu' equiprobabili. Quindi l'entropia della sorgente numerica così ottenuta è sicuramente minore di 4bit/simbolo.