SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Primo Appello – 1 Luglio 2011

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left[\dfrac{\sin \pi B(t-1)}{\pi(t-1)}\right]^2$.

a - Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza $H(f)$.

b - Si calcoli l'uscita del sistema all'ingresso $x(t) = 1 - \cos(\pi B t)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \cos^3(2\pi f_o t)$.

a - Si calcoli la minima frequenza di campionamento f_s per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = \dfrac{5}{2} f_o$. Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato.

c –Si calcoli la DFT dei primi 10 campioni del segnale campionato (n da 0 a 9).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario $x(t)$ con densità di probabilità delle ampiezze

$$p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(a-1)^2}{4}}.$$

Di questo processo si sa che per valori di $|\tau| \geq 5ms$ il coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau) = 0$.

Il processo $x(t)$ viene campionato con intervallo di campionamento $T = 17ms$, ottenendo il processo discreto x_n.

a - Si calcoli il valore della potenza e l'espressione del coefficiente di correlazione del processo x_n.

b – Il processo x_n viene filtrato con un sistema Lineare Tempo Invariante con risposta all'impulso h_n. Si scriva l'espressione di una possibile risposta all'impulso h_n tale per cui il valor medio del processo d'uscita y_n sia nullo e la sua varianza valga 16.

c – Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo casuale y_n.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Primo Appello – 1 Luglio 2011

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di $h(t)=\left[\frac{\sin \pi B(t-1)}{\pi(t-1)}\right]^2$ si può calcolare a partire da quella del segnale

$h_1(t)=\left[\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}\right]^2$ che poi andrà moltiplicata per $\exp\{-j2\pi f\}$.

Dunque:

$H_1(f)=rect\left(\frac{f}{B}\right)*rect\left(\frac{f}{B}\right)$ che è una funzione triangolare simmetrica tra $f=\pm B$ e che vale B in $f=0$.

$$H(f)=H_1(f)\exp\{-j2\pi f\}$$

I grafici del modulo e della fase della risposta in frequenza si ottengono da:

$$|H(f)|=H_1(f)$$
$$\prec H(f)=-2\pi f$$

b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)=\cos(\pi Bt)$è formata da 3 impulsi alle frequenze 0 (area 1), $B/2$ (area -1/2) e $-B/2$ (area -1/2)

L'uscita e' dunque:

$$y(t)=B-\frac{B}{2}\cos(\pi Bt-\pi B)=B-\frac{B}{2}\cos(\pi B(t-1))$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di Fourier del segnale e' data dalla seguente convoluzione

$$X(f)=\left[\frac{1}{2}\delta(f+f_o)+\frac{1}{2}\delta(f-f_o)\right]*\left[\frac{1}{2}\delta(f+f_o)+\frac{1}{2}\delta(f-f_o)\right]*\left[\frac{1}{2}\delta(f+f_o)+\frac{1}{2}\delta(f-f_o)\right]=$$
$$=\frac{3}{8}\delta(f+f_o)+\frac{3}{8}\delta(f-f_o)+\frac{1}{8}\delta(f+3f_o)+\frac{1}{8}\delta(f-3f_o)$$

La massima frequenza del segnale è dunque $3f_o$ e la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza è $6f_o$.

b – La frequenza di campionamento utilizzata è $\frac{5}{2}f_o$.
A causa dell'alias la trasformata del segnale campionato e':

$X(f)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{2}f_o\cdot\delta(f+f_o)+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{2}f_o\cdot\delta(f-f_o)+\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{2}f_o\cdot\delta\left(f+\frac{f_o}{2}\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{2}f_o\cdot\delta\left(f-\frac{f_o}{2}\right)$ periodica di periodo $\frac{5}{2}f_o$.

Per ricostruire il segnale tempo-continuo è necessario filtrare passa-basso nella banda $\pm\frac{5}{4}f_o$ moltiplicando per il coefficiente $\frac{2}{5f_o}$. La trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X(f)=\frac{3}{8}\delta(f+f_o)+\frac{3}{8}\delta(f-f_o)+\frac{1}{8}\delta\left(f+\frac{f_o}{2}\right)+\frac{1}{8}\delta\left(f-\frac{f_o}{2}\right)$$

L'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato è:

$$x(t)=\frac{3}{4}\cos(2\pi f_o t)+\frac{1}{4}\cos(\pi f_o t)$$

c – Il segnale campionato ha la seguente espressione:

$$x_n=x(nT)=\frac{3}{4}\cos\left(2\pi f_o n\frac{2}{5f_o}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\pi f_o n\frac{2}{5f_o}\right)=\frac{3}{4}\cos\left(2\pi\frac{2}{5}n\right)+\frac{1}{4}\cos\left(2\pi\frac{1}{5}n\right)$$

La DFT dei primi 10 campioni ha dunque la seguente espressione:

$$X_k=10\frac{3}{8}\delta_{k-4}+10\frac{3}{8}\delta_{k-6}+10\frac{1}{8}\delta_{k-2}+10\frac{1}{8}\delta_{k-8}$$

ESERCIZIO 3

a – Il processo casuale stazionario $x(t)$ ha densità di probabilità delle ampiezze gaussiana $p_x(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ con valor medio unitario e varianza $\sigma_x^2=2$.

Di questo processo si sa che per valori di $|\tau| \geq 5ms$ il coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau) = 0$. Quindi campionando il processo $x(t)$ con intervallo di campionamento $T = 17ms > 5ms$, si ottengono campioni tra loro indipendenti (coefficiente di correlazione impulsivo).

La varianza del processo discreto x_n è $\sigma_x^2 = 2$ (uguale a quella del processo stazionario continuo campionato) e il coefficiente di correlazione

$$\rho_x[m] = \frac{C_x[m]}{\sigma_x^2} = \frac{2\delta_m}{2} = \delta_m$$

b – Il valor medio del processo casuale in uscita è dato da quello dell'ingresso per la somma dei cefficienti della risposta all'impulso del filtro. Dato che i campioni del processo casuale x_n sono tra loro indipendenti, la varianza dell'uscita e' data dalla somma della varianza dei campioni d'ingresso (σ_x^2) moltiplicata per il modulo quadro dei campioni della risposta impulsiva.

Dunque tutte le risposte impulsive h_n tali che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n = 0$ e $\sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n|^2 = 16$, soddisfano la richiesta. La più corta tra queste risposte all'impulso ha 2 campioni uguali ed opposti per rispettare la prima condizione:

$$h_n = A\delta_n - A\delta_{n-1}$$

Quindi: $y_n = Ax_n - Ax_{n-1}$

La varianza dell'uscita sarà semplicemente la somma delle varianze dei campioni d'ingresso (sono indipendenti) moltiplicate A^2.
Quindi:

$$\sigma_y^2 = 2A^2\sigma_x^2 = 4A^2 = 16$$

Da cui $h_n = 2\delta_n - 2\delta_{n-1}$

Alternativamente si può procedere attraverso il calcolo dell'autocorrelazione dell'uscita data quella dell'ingresso (calcolo più lungo, ma utile per il punto successivo):

$$R_x[m] = 2\delta_m + 1$$
$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = (2\delta_m + 1) * (2A^2\delta_m - A^2\delta_{m-1} - A^2\delta_{m+1}) =$$
$$= 4A^2\delta_m - 2A^2\delta_{m-1} - 2A^2\delta_{m+1}$$

$$\sigma_y^2 = R_y[0] - 0 = 4A^2 = 16$$

c - $R_y[m] = 16\delta_m - 8\delta_{m-1} - 8\delta_{m+1}$

$$S_y(\phi) = 16 - 16\cos(2\pi\phi)$$