SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 26 giugno 2018

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)=\dfrac{\sin\left[\pi B\left(t-\frac{1}{B}\right)\right]}{\pi\left(t-\frac{1}{B}\right)}+\dfrac{\sin\left[\pi B\left(t+\frac{1}{B}\right)\right]}{\pi\left(t+\frac{1}{B}\right)}$.

a - Si tracci il grafico della risposta in frequenza del sistema dato.

b- Si trovi l'espressione dell'uscita *y(t)* quando all'ingresso del sistema si pone il segnale $x(t)=2\cos^2\left(2\pi\frac{3B}{16}t\right)-2\cos^2\left(2\pi\frac{B}{8}t\right)$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=\left(\dfrac{\sin\pi Bt}{\pi t}\right)^2\cos\left(2\pi\frac{B}{2}t\right)$.

a – Trovare la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=2B$ Hz. Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto x_n.

c –Trovare l'espressione della DFT di 100 campioni del segnale $y_n=x_n*\cos\left(2\pi\frac{n}{10}\right)$.

ESERCIZIO 3

Sia dato un processo casuale tempo-continuo *x(t)* gaussiano a valor medio m_x e varianza σ_x^2. Il coefficiente di correlazione ha la seguente espressione: $\rho_x(\tau)=T\dfrac{\sin\left(\pi\frac{\tau}{T}\right)}{\pi\tau}$.

a - Si calcolino la potenza e l'autocorrelazione del processo *x(t)* e del processo discreto x_n ottenuto campionando *x(t)* con intervallo di campionamento T.

b – Il processo casuale x_n viene filtrato con la seguente risposta all'impulso $h_n=+\frac{1}{4}\delta_{n+1}+\frac{1}{2}\delta_n+\frac{1}{4}\delta_{n-1}$.
Si calcolino le espressioni dell'autocorrelazione e della densità spettrale di potenza del processo filtrato y_n.

b – Si calcoli la potenza del processo casuale $z_n=y_n-y_{n-10}$

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 26 Giugno 2018

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza del sistema dato ha la seguente espressione:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right) \cdot 2\cos\left(2\pi \frac{f}{B}\right)$$

Il grafico può essere tracciato solo per la parte reale (grafico singolo) o modulo e fase:

$$|H(f)| = rect\left(\frac{f}{B}\right) \cdot 2\left|\cos\left(2\pi \frac{f}{B}\right)\right|$$

$$\prec H(f) = \begin{cases} 0 & 0 < |f| < \dfrac{B}{4} \\ \pi & B/4 < |f| < B/2 \end{cases}$$

b –La trasformata di Fourier dell'ingresso $x(t) = 2\cos^2\left(2\pi \frac{3B}{16} t\right) - 2\cos^2\left(2\pi \frac{B}{8}\right)$ vale:

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta\left(f \pm \frac{3B}{8}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f \pm \frac{B}{4}\right)$$

La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \cos\left(2\pi \frac{f}{B}\right) \cdot \left[\delta\left(f \pm \frac{3B}{8}\right) - \delta\left(f \pm \frac{B}{4}\right)\right] =$$

$$= \cos\left(\pi \frac{3}{4}\right)\delta\left(f \pm \frac{3B}{8}\right) - \cos\left(\pi \frac{1}{2}\right)\delta\left(f \pm \frac{B}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\delta\left(f \pm \frac{3B}{8}\right)$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t) = -\sqrt{2}\cos\left(2\pi \frac{3B}{8} t\right)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t)=\left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}\right)^2 \cos\left(2\pi \frac{B}{2} t\right)$ è $X(f)=tri\left(\frac{f}{B}+\frac{1}{2}\right)+tri\left(\frac{f}{B}-\frac{1}{2}\right)$ dove $tri(f)=rect(f)*rect(f)$. Disegnando la trasformata si vede che questa è costante pari a $\frac{B}{2}$ nella banda $-\frac{B}{2}<f<\frac{B}{2}$ e che decresce linearmente fino ad annullarsi alle frequenze $-\frac{3B}{2}$ e $\frac{3B}{2}$. La massima frequenza del segnale è dunque $\frac{3B}{2}$ e per il teorema del campionamento, la minima frequenza di campionamento per evitare alias è $f_s=3B$.

b – Campionando il segnale con $f_s=2B$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ è una costante pari a B^2 nella banda compresa tra $-\frac{f_s}{2}$ e $+\frac{f_s}{2}$ (cioè tra $-B$ e B) periodica di periodo $f_s=2B$.

Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando un solo periodo di $\tilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s}$.
Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f)=\frac{B}{2}\cdot rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t)=\frac{B}{2}\frac{\sin 2\pi Bt}{\pi t}$

c – Il segnale $x_n=B^2\delta_n$ si ottiene antitrasformando $\tilde{X}(f)$ o più semplicemente sostituendo $t=nT=\frac{n}{2B}$ nell'espressione di $x(t)=\left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}\right)^2 \cos\left(2\pi \frac{B}{2} t\right)$ o di $x_R(t)=\frac{B}{2}\frac{\sin 2\pi Bt}{\pi t}$.
Dunque $y_n=x_n*\cos\left(2\pi\frac{n}{10}\right)=B^2\cos\left(2\pi\frac{n}{10}\right)$

La DFT è quindi: $X_k=50B^2\delta_{k-10}+50B^2\delta_{k-90}$ per $0\le k\le 99$

ESERCIZIO 3

a - La potenza di un processo casuale è uguale al suo valore quadratico medio. Quindi:
$P_x = E\left[\left|x(t)\right|^2\right] = \sigma_x^2 + \left|m_x\right|^2$ sia per il processo continuo che per quello discreto.
L'autocorrelazione del processo continuo si ricava immediatamente dalla definizione di coefficiente di correlazione:

$$\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}$$

da cui si ottiene:

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) + m_x^2 = \sigma_x^2 T \frac{\sin\left(\pi \tau/T\right)}{\pi\tau} + m_x^2$$

L'autocorrelazione del processo discreto si ottiene campionando quella del processo continuo a passo T, ottenendo:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + \left|m_x\right|^2$$

b - L'autocorrelazione dell'uscita è data da:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\sigma_x^2 \delta_m + \left|m_x\right|^2\right) * \left(\frac{1}{16}\delta_{m+2} + \frac{1}{4}\delta_{m+1} + \frac{3}{8}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{16}\delta_{m-2}\right) =$$

$$= \sigma_x^2\left(\frac{1}{16}\delta_{m+2} + \frac{1}{4}\delta_{m+1} + \frac{3}{8}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{16}\delta_{m-2}\right) + \left|m_x\right|^2$$

La densità spettrale di potenza è data dalla trasformata di Fourier dell'autocorrelazione e vale:

$$S_y(\phi) = \sigma_x^2\left(\frac{1}{8}\cos(4\pi\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi\phi) + \frac{3}{8}\right) + \left|m_x\right|^2 \delta(\phi)$$

b - Per $m = 10$ l'autocovarianza di y_n è nulla e quindi i campioni y_n e y_{n-10} sono incorrelati. Dunque la varianza della loro differenza è uguale alla somma delle varianze ed essendo il valor medio di $z_n = y_n - y_{n-10}$ nullo, la potenza vale:

$$P_z = \sigma_z^2 = 2\sigma_y^2 = \frac{3}{4}\sigma_x^2$$