

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 25 Giugno 2019

La prima parte degli esercizi presenta una difficoltà minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà. Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso data dalla seguente convoluzione:

$$h(t) = \left[\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right]^2 - \frac{1}{2} \delta(t) \right] * \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}.$$

a - Si calcoli l'espressione risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato.

b - Si tracci grafico di modulo e fase di $H(f)$.

c - Si trovi l'espressione dell'uscita $y(t)$ quando all'ingresso del sistema si pone il segnale

$$x(t) = 1 + \cos\left(2\pi \frac{1}{4}t\right) + \sin\left(2\pi \frac{1}{2}t\right) + \cos\left(2\pi \frac{3}{4}t\right)$$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \cos(2\pi t) \cdot \cos(4\pi t + \varphi)$.

a – Trovare la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 4$ Hz. Trovare l'espressione della trasformata di Fourier del segnale discreto x_n sia in frequenza che in frequenza normalizzata.

c – Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto x_n .

ESERCIZIO 3

Il processo casuale stazionario tempo continuo reale $x(t)$ è bianco nella banda $-25\text{Hz} \leq f \leq 25\text{Hz}$ e ha valor medio e varianza unitari.

a – Si scrivano le espressioni di autocorrelazione e coefficiente di correlazione del processo discreto x_n ottenuto campionando il processo continuo con $T = \frac{1}{10}$ s.

b – Si calcoli la potenza della differenza di due campioni qualsiasi di x_n .

c – Si calcoli l'autocorrelazione del processo casuale $y_n = x_n * (\delta_n + 2\delta_{n+1} + 3\delta_{n+2})$

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 25 Giugno 2019

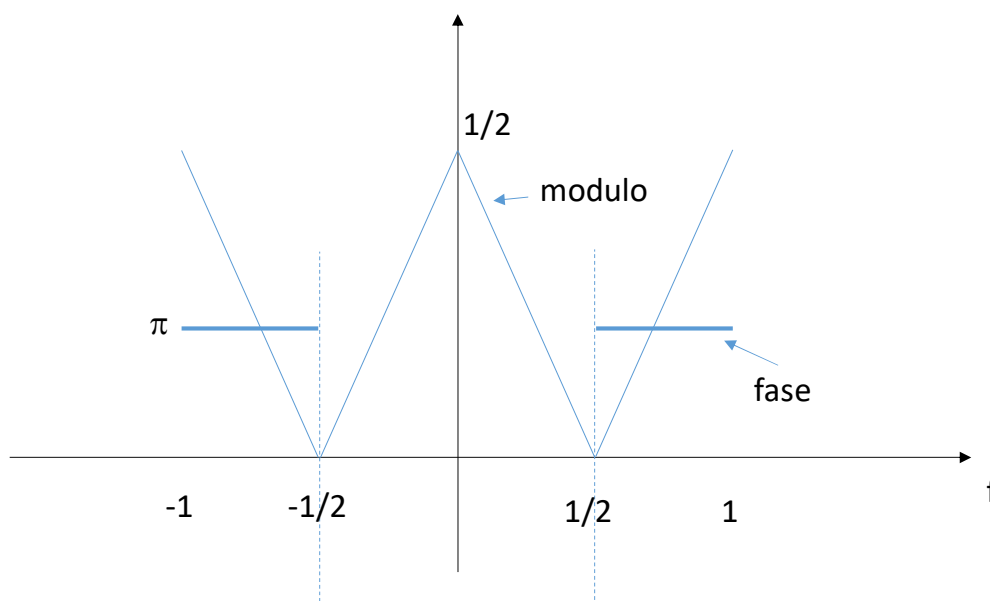
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza del sistema dato ha la seguente espressione:

$$H(f) = \left(\text{tri}(f) - \frac{1}{2} \right) \cdot \text{rect}(f)$$

b – Grafici di modulo e fase di $H(f)$



c – La trasformata di Fourier dell'ingresso $x(t)$ è composta da 7 impulsi alle frequenze

$$f = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{4}. \text{ Questi vengono moltiplicati rispettivamente per } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}.$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos\left(2\pi \frac{1}{4} t\right) - \frac{1}{4} \cos\left(2\pi \frac{3}{4} t\right)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t) = \cos(2\pi t) \cdot \cos(4\pi t + \varphi)$ è

$$X(f) = \frac{1}{4} e^{-j\varphi} \delta(f+3) + \frac{1}{4} e^{-j\varphi} \delta(f+1) + \frac{1}{4} e^{j\varphi} \delta(f-1) + \frac{1}{4} e^{j\varphi} \delta(f-3)$$

La massima frequenza del segnale è dunque 3Hz e per il teorema del campionamento, la minima frequenza di campionamento per evitare alias è $f_s = 6$

b - Campionando il segnale con $f_s = 4$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier ha la seguente espressione:

$$\tilde{X}(f) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cos(\varphi) \delta(f+1) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cos(\varphi) \delta(f-1) \quad \text{di periodo 4}$$

$$\tilde{X}(\phi) = \frac{1}{2} \cos(\varphi) \delta\left(\phi + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos(\varphi) \delta\left(\phi - \frac{1}{4}\right) \quad \text{di periodo 1}$$

c - Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando $\tilde{X}(f)$

moltiplicata per $\frac{1}{f_s} = \frac{1}{2}$ nella banda $-\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$ cioè nella banda $-2 \leq f \leq 2$

Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f) = \frac{1}{2} \cos(\varphi) \delta(f+1) + \frac{1}{2} \cos(\varphi) \delta(f-1)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t) = \cos(\varphi) \cdot \cos(2\pi t)$

ESERCIZIO 3

a - La potenza del processo è $P = \sigma_x^2 + m_x^2 = 2$

L'autocorrelazione del processo dato ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{50} \frac{\sin \pi 50 \tau}{\pi \tau} + 1$$

Il coefficiente di correlazione:

$$\rho_x(\tau) = \frac{\sin \pi 50 \tau}{\pi 50 \tau}$$

Dunque:

$$R_x[m] = R_x\left(\frac{m}{10}\right) = \frac{1}{50} \frac{\sin \pi 50 \frac{m}{10}}{\pi \frac{m}{10}} + 1 = \frac{1}{5} \frac{\sin \pi 5m}{\pi m} + 1 = \delta_m + 1$$

$$\rho_x[m] = \delta_m$$

b – I campioni del processo discreto sono tra loro indipendenti dunque la potenza della differenza di 2 campioni qualsiasi è data dalla somma delle varianze dei singoli campioni:

$$P_{x_n - x_m} = E[(x_n - x_m)^2] = 2R_x[0] - 2R_x[m] = 4 - 2 = 2$$

c – L'autocorrelazione del processo $y_n = x_n * (\delta_n + 2\delta_{n+1} + 3\delta_{n+2})$ si calcola come:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = R_x[m] * (14\delta_m + 8\delta_{m\pm 1} + 3\delta_{m\pm 2}) = 14\delta_m + 8\delta_{m\pm 1} + 3\delta_{m\pm 2} + 36$$