SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 12 Luglio 2017

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)=\left[rect\left(\frac{1}{T}\left(t+\frac{2T}{3}\right)\right)+rect\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{2T}{3}\right)\right)\right]*rect\left(\frac{t}{T}\right)$ (il simbolo $*$ indica la convoluzione).

a - Si calcoli l'espressione della risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato e si dica se è reale o complessa.

b - Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema quando l'ingresso è: $x(t)=\cos\left(6\pi\frac{t}{T}\right)+\cos\left(2\pi\frac{15t}{2T}\right)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=1+rect\left(\frac{t}{10}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{8}\right)$.

a – Si tracci il grafico del segnale dato $x(t)$ e del segnale discreto x_n ottenuto campionando $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s=\frac{1}{2}$. Il teorema del campionamento è stato rispettato? Perché?

b – Si scrivano le espressioni $\widetilde{X}(\phi)$ e $\widetilde{X}(f)$ della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n in frequenza normalizzata e in frequenza.

c – Trovare l'espressione del segnale tempo continuo $y(t)$ ricostruito dai campioni x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n con valor medio unitario e varianza σ_x^2. I campioni del processo tra loro adiacenti hanno un coefficiente di correlazione 1/4, mentre a distanze maggiori sono incorrelati.

a - Si scriva l'espressione del coefficiente di correlazione $\rho_x[m]$.

b – Il processo x_n viene filtrato con un sistema LTI con risposta all'impulso $h_n=-\frac{1}{4}\delta_{n+1}+\delta_n$ ottenendo il processo y_n. Si trovi il valore di σ_x^2 sapendo che $R_{yx}[0]=\frac{9}{2}$.

c – Si calcoli la potenza del processo casuale y_n.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Appello – 12 Luglio 2017

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di $h(t)=\left[rect\left(\frac{1}{T}\left(t+\frac{2T}{3}\right)\right)+rect\left(\frac{1}{T}\left(t-\frac{2T}{3}\right)\right)\right]*rect\left(\frac{t}{T}\right)$ è:

$$H(f)=\left[\frac{\sin\pi Tf}{\pi f}\right]^2 e^{-j2\pi\frac{2T}{3}f}+\left[\frac{\sin\pi Tf}{\pi f}\right]^2 e^{j2\pi\frac{2T}{3}f}=2\left[\frac{\sin\pi Tf}{\pi f}\right]^2\cos\left(2\pi\frac{2T}{3}f\right)$$

b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)=\cos\left(6\pi\frac{t}{T}\right)+\cos\left(2\pi\frac{15t}{2T}\right)$ è:

$$X(f)=\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{3}{T}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{3}{T}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{15}{2T}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{15}{2T}\right)$$

La trasformata dell'uscita è $Y(f)=H(f)X(f)$

Dato che $H(f)=0$ alle frequenze multiple di $\frac{1}{T}$, i primi 2 impulsi si annullano e rimane:

$$Y(f)=\left[\frac{\sin\pi Tf}{\pi f}\right]^2\cos\left(2\pi\frac{2T}{3}f\right)\delta\left(f+\frac{15}{2T}\right)+\left[\frac{\sin\pi Tf}{\pi f}\right]^2\cos\left(2\pi\frac{2T}{3}f\right)\delta\left(f-\frac{15}{2T}\right)=$$

$$=\left[\frac{\sin\pi\frac{15}{2}}{\pi\frac{15}{2T}}\right]^2\delta\left(f+\frac{15}{2T}\right)+\left[\frac{\sin\pi\frac{15}{2}}{\pi\frac{15}{2T}}\right]^2\delta\left(f-\frac{15}{2T}\right)$$

Antitrasformando:

$$y(t)=2\left[\frac{\sin\pi\frac{15}{2}}{\pi\frac{15}{2T}}\right]^2\cos\left(2\pi\frac{15}{2T}t\right)$$

ESERCIZIO 2

a - $x(t)=1+rect\left(\frac{t}{10}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{8}\right)$ rappresenta un tratto di coseno di periodo $T_o=8$ limitato nell'intervallo $-5<t<5$ più una costante unitaria. I valori diversi da uno (la costante unitaria campionata) del segnale discreto x_n ottenuto campionando $x(t)$ con frequenza di campionamento $f_s=\frac{1}{2}$ sono solo 3: $x_n=-\delta_{n-2}+\delta_n-\delta_{n+2}+1$.

Il teorema del campionamento non è stato rispettato perché la banda del segnale $x(t)$ è infinita.

b – Le espressioni della trasformata in frequenza normalizzata e in frequenza si trovano direttamente dalla definizione:

$$\tilde{X}(\phi)=1-2\cos(4\pi\phi)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\phi-k) \quad \text{(periodicità 1)}$$

Passando alla frequenza $f=f_s\phi$, si ottiene

$$\tilde{X}(f)=1-2\cos(8\pi f)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(2f-k)=1-2\cos(8\pi f)+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{2}\right) \quad \text{(periodicità 1/2)}$$

c – Il segnale tempo continuo ricostruito da $x_n=-\delta_{n-2}+\delta_n-\delta_{n+2}+1$ può calcolarsi agevolmente nel dominio del tempo o delle frequenze tenendo presente che la costante unitaria viene ricostruita correttamente dato che non è in alias:

$$y(t)=1+[-\delta(t-4)+\delta(t)-\delta(t+4)]*\frac{\sin\pi f_s t}{\pi f_s t}=1-\frac{\sin\pi^{(t-4)}/_2}{\pi^{(t-4)}/_2}+\frac{\sin\pi\, {}^t/_2}{\pi\, {}^t/_2}--\frac{\sin\pi^{(t+4)}/_2}{\pi^{(t+4)}/_2}$$

Oppure passando dal filtro di ricostruzione nel dominio della frequenza

$$H_R(f)=\frac{1}{f_s}rect\left(\frac{f}{f_s}\right)=2rect(2f)$$

$$Y(f)=\tilde{X}(f)H_R(f)==\left[1-2\cos(8\pi f)+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{2}\right)\right]\cdot 2rect(2f)=[1-2\cos(8\pi f)]\cdot 2rect(2f)+\delta(f)$$

da cui

$$y(t)=[-\delta(t-4)+\delta(t)-\delta(t+4)]*\frac{\sin\pi\, {}^t/_2}{\pi\, {}^t/_2}+1=-\frac{\sin\pi^{(t-4)}/_2}{\pi^{(t-4)}/_2}+\frac{\sin\pi\, {}^t/_2}{\pi\, {}^t/_2}--\frac{\sin\pi^{(t+4)}/_2}{\pi^{(t+4)}/_2}+1$$

ESERCIZIO 3

a – Dato che il coefficiente di correlazione $\rho_x[m]$ di un qualsiasi processo casuale è per definizione unitario in $m=0$ e sappiamo che a distanza $m=1$ vale ¼ e che a distanze $m>1$ è nullo, si può scrivere che

$$\rho_x[m]=\delta_m+\frac{1}{4}\delta_{m-1}+\frac{1}{4}\delta_{m+1}\ .$$

b – La cross-correlazione tra uscita e ingresso è data da:

$$R_{yx}[m]=R_x[m]*h_m=R_x[m]*\left(\delta_m-\frac{1}{4}\delta_{m+1}\right)=R_x[m]-\frac{1}{4}R_x[m+1]$$

dove $R_x[m]=\sigma_x^2\delta_m+\frac{\sigma_x^2}{4}\delta_{m-1}+\frac{\sigma_x^2}{4}\delta_{m+1}+1$

Infine sapendo che:

$$R_{yx}[0]=R_x[0]-\frac{1}{4}R_x[1]=1+\sigma_x^2-\frac{1}{4}-\frac{\sigma_x^2}{16}=\frac{3}{4}+\frac{15}{16}\sigma_x^2=\frac{18}{4}$$

$$\sigma_x^2=4$$

c – L'autocorrelazione dell'uscita ha la seguente espressione:

$$R_y[m]=R_x[m]*h_m*h_{-m}=R_x[m]*\left(\delta_m-\frac{1}{4}\delta_{m+1}\right)*\left(\delta_m-\frac{1}{4}\delta_{m-1}\right)=$$

$$=R_x[m]*\left(\frac{17}{16}\delta_m-\frac{1}{4}\delta_{m-1}-\frac{1}{4}\delta_{m+1}\right)=\frac{17}{16}R_x[m]-\frac{1}{4}R_x[m-1]-\frac{1}{4}R_x[m+1]$$

Dato che la potenza dell'uscita è $R_y[0]$ si ottiene:

$$P_y=R_y[0]=\frac{17}{16}R_x[0]-\frac{1}{2}R_x[1]=\frac{17}{16}\left(1+\sigma_x^2\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sigma_x^2}{4}\right)=\frac{17}{16}5-\frac{1}{2}2=\frac{69}{16}$$