SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 11 Luglio 2014

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t)=\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 \cos\left(10\pi t+\pi/3\right)$.

a [6/30]- Si traccino i grafici di parte reale, parte immaginaria, modulo e fase della trasformata di Fourier $X(f)$.

b [5/30]- Si calcoli l'energia del segnale $x(t)$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t)=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\pi 100\left(t+10^{-2}\right)\right)}{\pi 100\left(t+10^{-2}\right)}+\frac{\sin(\pi 100 t)}{\pi 100 t}+\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\pi 100\left(t-10^{-2}\right)\right)}{\pi 100\left(t-10^{-2}\right)}$. Il segnale $x(t)$ viene campionato a passo $T=10ms$ ottenendo il segnale discreto x_n.

a [6/30]**-** Si tracci il grafico della Trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza, sia in frequenza normalizzata.

b [5/30]**-** Si calcoli l'espressione X_k della DFT dei 4 campioni x_n con $-1 \le n \le 2$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario gaussiano con valor medio unitario, varianza unitaria e autocorrelazione (si veda soluzione) che scende linearmente a zero in 1 secondo dopo di che rimane nulla. Il processo $x(t)$ viene campionato a passo $T=0.5s$ ottenendo il processo discreto x_n.

a [6/30]- Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo casuale y_n ottenuto calcolando la media aritmetica di 3 campioni consecutivi del processo x_n (da x_n a x_{n-2}).

b [5/30]– Si scriva l'espressione della funzione di cross-correlazione tra y_n e x_n.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI appello del 11 Luglio 2014

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a)

$$x(t)=\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2\cos\left(10\pi t+\pi/3\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2\left[\exp\left\{j\left(10\pi t+\pi/3\right)\right\}+\exp\left\{-j\left(10\pi t+\pi/3\right)\right\}\right]$$

Da cui

$$X(f)=\frac{1}{2}\exp\left\{j\pi/3\right\}tri(f+5)+\frac{1}{2}\exp\left\{-j\pi/3\right\}tri(f-5)$$

$$\mathrm{Re}\{X(f)\}=\frac{1}{4}tri(f+5)+\frac{1}{4}tri(f-5)$$
$$\mathrm{Im}\{X(f)\}=\frac{\sqrt{3}}{4}tri(f+5)-\frac{\sqrt{3}}{4}tri(f-5)$$

$$|X(f)|=\frac{1}{2}tri(f+5)+\frac{1}{2}tri(f-5)$$
$$\angle\{X(f)\}=\begin{cases}-\pi/3 & -6<f<-4\\ \pi/3 & 4<f<6\end{cases}$$

b)

$$E_{x(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df=4\int_0^1 1/4\, f^2df=\frac{1}{3}$$

ESERCIZIO 2

a – Il segnale dato altro non è che l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito a partire dai 3 campioni $x_n=\frac{1}{2}\delta_{n+1}+\delta_n+\frac{1}{2}\delta_{n-1}$ con intervallo di campionamento $T=10ms$.

Infatti, ponendo $t = n10^{-2}$ in $x(t)$ si ottiene:

$$x(n10^{-2}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi 100(n10^{-2}+10^{-2}))}{\pi 100(n10^{-2}+10^{-2})} + \frac{\sin(\pi 100 n10^{-2})}{\pi 100 n10^{-2}} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi 100(n10^{-2}-10^{-2}))}{\pi 100(n10^{-2}-10^{-2})} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(n-1))}{\pi(n-1)} = \frac{1}{2}\delta_{n+1} + \delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-1}$$

La trasformata di Fourier del segnale x_n in frequenza e in frequenza normalizzata ha le seguenti espressioni:

$$X(f) = \frac{1}{2}e^{j2\pi fT} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi fT} = \frac{1}{2}e^{j2\pi f10^{-2}} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f10^{-2}} = 1 + \cos(2\pi f10^{-2})$$ periodica di periodo 100

$$X(\phi) = \frac{1}{2}e^{j2\pi\phi} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\phi} = 1 + \cos(2\pi\phi)$$ periodica di periodo 1

b - L'espressione X_k della DFT dei 4 campioni x_n con $-1 \le n \le 2$ si può calcolare

1 - dalla definizione applicando l'operatore DFT alla sequenza $x_n = \delta_n + \frac{1}{2}\delta_{n-1} + 0\delta_{n-2} + \frac{1}{2}\delta_{n-3}$

2 – campionando $X(\phi) = 1 + \cos(2\pi\phi)$ nei valori $\phi = \frac{k}{N} = \frac{k}{4}$ ottenendo:

$$X_k = X\left(\frac{k}{4}\right) = 1 + \cos\left(2\pi\frac{k}{4}\right)$$

ESERCIZIO 3

a – La densità di probabilità delle ampiezze di x_n è identica a quella del processo casuale continuo. La densità di probabilità delle ampiezze di y_n è ancora gaussiana. E' sufficiente calcolare valor medio e varianza di y_n.

Il processo casuale $y_n = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2}$ può scriversi come convoluzione tra x_n e
$h_n = \frac{1}{3}\delta_n + \frac{1}{3}\delta_{n-1} + \frac{1}{3}\delta_{n-2}$

Il valor medio di y_n è unitario come quello di x_n.

La varianza si può calcolare come autocorrelazione in zero più il valor medio al quadrato.

L'autocorrelazione del processo casuale x_n si ottiene campionando quella del segnale tempo continuo:

[Ovviamente il testo è incongruente in quanto il valor medio non può essere unitario se l'autocorrelazione va a zero e ci rimane. Nel testo la parola autocorrelazione va sostituita con autocovarianza. NE HO DOVEROSAMENTE E GENEROSAMENTE TENUTO CONTO IN FASE DI VALUTAZIONE]

$$R_x[m] = \frac{1}{2}\delta_{m+1} + \delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + 1$$

Il processo casuale $y_n = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2}$ può scriversi come convoluzione tra x_n e

$h_n = \frac{1}{3}\delta_n + \frac{1}{3}\delta_{n-1} + \frac{1}{3}\delta_{n-2}$

Dunque

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = R_x[m] * \left(\frac{1}{9}\delta_{m+2} + \frac{2}{9}\delta_{m+1} + \frac{3}{9}\delta_m + \frac{2}{9}\delta_{m-1} + \frac{1}{9}\delta_{m-2}\right)$$

Non è necessario calcolare tutta l'autocorrelazione; è sufficiente calcolare il suo valore in zero.

$$R_y[0] = \left(\frac{1}{2}\frac{2}{9} + 1\frac{3}{9} + \frac{1}{2}\frac{2}{9} + 1\right) = \frac{14}{9}$$

$$\sigma_y^2 = C_y[0] = R_y[0] - 1 = \frac{5}{9}$$

b - L'espressione della cross-correlazione uscita ingresso è:

$$R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m = \left(\frac{1}{2}\delta_{m+1} + \delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} + 1\right) * \left(\frac{1}{3}\delta_m + \frac{1}{3}\delta_{m-1} + \frac{1}{3}\delta_{m-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\delta_{m+1} + \frac{3}{6}\delta_m + \frac{5}{6}\delta_{m-1} + \frac{3}{6}\delta_{m-2} + \frac{1}{6}\delta_{m-3} + 1$$