SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI prova del 10 Luglio 2015

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h e 00 min.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = rect(t-T) * rect\left(t + T/2\right)$.

a [4/30]- Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza *H(f)*

b [3/30]- Si calcoli l'espressione dell'uscita $y(t)$ del sistema dato ponendo all'ingresso il segnale $x(t) = \cos^2(2\pi t)$.

c [3/30]- Si calcoli l'energia della risposta in frequenza $H(f)$ calcolata al punto a)

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t) = \cos^2(5\pi t + \varphi)$

a [4/30]- Detto $T_{\max}$ il massimo intervallo di campionamento che non genera alias in frequenza, si campioni $x(t)$ con $T = \frac{5}{3}T_{\max}$ e si tracci il grafico della Trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza, sia in frequenza normalizzata.

b [3/30]- Si calcoli l'espressione del segnale ricostruito dal segnale x_n.

c [3/30]- Si calcoli l'espressione della DFT dei primi 60 campioni del segnale x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario con densità di probabilità delle ampiezze uniforme, valor medio unitario e autocorrelazione $R_x(\tau) = \frac{4}{3B}\frac{\sin \pi B\tau}{\pi\tau} + 1$

a [4/30]- Si scriva l'espressione della densità di probabilità delle ampiezze del processo discreto x_n ottenuto campionando $x(t)$ a passo $T = 1/2B$.

b [3/30]–]- Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo discreto x_n .

c [3/30]-]– Il processo x_n viene filtrato con un filtro la cui risposta all'impulso ha la seguente espressione: $h_n = 1/2\,\delta_n - 1/2\,\delta_{n-2}$. Si calcoli la potenza e la varianza del processo in uscita.

TELECOMUNICAZIONI prova del 7 Luglio 2015

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta all'impulso è un triangolo di durata complessiva 2 centrato intorno a T/2. In frequenza:

$$H(f)=\left[\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right]^2 e^{-j\pi T f}$$

Da cui: $|H(f)|=\left[\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right]^2$

$\measuredangle H(f)=-\pi T f$

b - Il calcolo può essere convenientemente svolto nel dominio della frequenza.

$$Y(f)=H(f)\cdot X(f)$$

$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f-2)+\frac{1}{4}\delta(f+2)$$

$$Y(f)=\frac{1}{2}\delta(f)$$

Anti-trasformando si ottiene:

$$y(t)=\frac{1}{2}$$

c - Il calcolo dell'energia può essere convenientemente svolto nei tempi (area del triangolo al quadrato): $E_H=2\int_0^1 t^2 dt=\frac{2}{3}$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata del segnale dato è:

$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}e^{j2\varphi}\delta(f-5)+\frac{1}{4}e^{-j2\varphi}\delta(f+5)$$

A questo risultato si può arrivare sia utilizzando la convoluzione in frequenza tra la trasformata del coseno con se stessa, sia ricordando che $x(t)=\cos^2(5\pi t+\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(10\pi t+2\varphi)$.
La massima frequenza del segnale è di 5Hz, quindi la minima frequenza di campionamento è pari a 10Hz e $T_{\max}=\frac{1}{10}$ s.
Campionando il segnale dato con $T=\frac{5}{3}\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$ s'introduce alias in frequenza.
La trasformata in frequenza ha la seguente espressione:

$$\tilde{X}(f)=3\delta(f)+\frac{3}{2}e^{j2\varphi}\delta(f+1)+e^{-j2\varphi}\frac{3}{2}\delta(f-1)$$ periodica di periodo 6

La trasformata in frequenza normalizzata ha la seguente espressione:

$$X(\phi)=\frac{1}{2}\delta(\phi)+\frac{1}{4}e^{j2\varphi}\delta\left(\phi+\frac{1}{6}\right)+e^{-j2\varphi}\frac{1}{4}\delta\left(\phi-\frac{1}{6}\right)$$ periodica di periodo 1

b - Considerando la trasformata di Fourier del segnale discreto nella banda -3_+3, il segnale continuo ricostruito dal segnale discreto avrà la seguente espressione:

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi t-2\varphi)=\cos^2(\pi t-\varphi)$$

c - Il segnale discreto ha la seguente espressione:

$$x_n=\cos^2\left(5\pi\frac{n}{6}+\varphi\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{5}{6}n+2\varphi\right)$$

La frequenza normalizzata del coseno è superiore a ½ quindi il segnale discreto può scriversi come coseno a frequenza normalizzata -1/6

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(-2\pi\frac{1}{6}n+2\varphi\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{1}{6}n-2\varphi\right)$$

In 60 campioni abbiamo una costante e un 10 cicli esatti di coseno. Dunque:

$$X_k=30\delta_k+15e^{-j2\varphi}\delta_{k-10}+15e^{j2\varphi}\delta_{k-50}$$

<u>ESERCIZIO 3</u>

a – La varianza del processo si ricava dai dati del problema:

$R_x(0)=\frac{4}{3}+1=\sigma_x^2+m_x^2$ da cui $\sigma_x^2=\frac{4}{3}$

Essendo la densità di probabilità uniforme, sappiamo che $\sigma_x^2=\frac{4}{3}=\frac{\Delta^2}{12}$, da cui $\Delta=4$ e dunque la densità di probabilità delle ampiezze è: $p_x(a)=\frac{1}{4}rect\left(\frac{a-1}{4}\right)$

b – La densità spettrale di potenza del processo discreto x_n si ottiene o dal teorema del campionamento o direttamente come trasformata del seno cardinale campionato:

$$R_x[m]=\frac{4}{3B}\frac{\sin \pi B \, {}^{m}\!/_{2B}}{\pi \, {}^{m}\!/_{2B}}+1=\frac{8}{3}\frac{\sin \pi \, {}^{m}\!/_{2}}{\pi m}+1$$

$S_x(\phi)=\frac{8}{3}rect(2\phi)+\delta(\phi)$ periodica di periodo unitario.

Seguendo il teorema del campionamento:

$$S_x(f)=2B\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{4}{3B}rect\left(\frac{f-k2B}{B}\right)+\delta(f-k2B)\right\}$$

Cioè: $S_x(f)=\frac{8}{3}rect\left(\frac{f}{B}\right)+2B\delta(f)$ periodica di periodo $\frac{1}{T}=2B$.

c - La potenza dell'uscita si può calcolare direttamente dalla definizione oppure passando attraverso il calcolo dell'autocorrelazione dell'uscita:

$$R_y[m]=R_x[m]*h_m*h_{-m}$$

$$h_m*h_{-m}={}^{1}\!/_{2}\,\delta_m-{}^{1}\!/_{4}\,\delta_{m-2}-{}^{1}\!/_{4}\,\delta_{m+2}$$

Da cui:

$$R_y[0]=\frac{1}{2}R_x[0]-\frac{1}{4}R_x[2]-\frac{1}{4}R_x[-2]=\frac{2}{3}=P_y$$

Oppure, semplicemente:

$$P_y=E\left[y_n^2\right]=E\left[\frac{1}{4}x_n^2+\frac{1}{4}x_{n-2}^2-\frac{1}{2}x_n x_{n-2}\right]=\frac{1}{2}R_x[0]-\frac{1}{2}R_x[2]=\frac{2}{3}$$

Il valor medio dell'uscita è nullo e quindi varianza e potenza coincidono.