SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 24 Giugno 2016

La prima parte degli esercizi presenta una difficoltà minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficoltà nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficoltà.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h e 15minuti.

ESERCIZIO 1

Sia dato il segnale $x(t)=\left[\dfrac{\sin\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]^2\cos(2\pi t)$.

a - Si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale dato (*nella soluzione si utilizzi la seguente simbologia:* $tri(f)=rect(f)*rect(f)$)

b - Si calcoli la seguente convoluzione: $y(t)=x(t)*[1+\cos(\pi t)]$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=\cos(20\pi(t-\tau))$.

a - Si calcoli la minima frequenza di campionamento f_s per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=12\,\text{Hz}$. Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato.

c –Si calcoli la DFT dei primi 60 campioni del segnale campionato (n da 0 a 59).

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario $x(t)$ con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana, valor medio unitario e funzione di auto-covarianza $C_x(\tau)=\dfrac{\sin\pi 10\tau}{\pi 10\tau}$.
Il processo $x(t)$ viene campionato con intervallo di campionamento $T=100ms$, ottenendo il processo discreto x_n.

a - Si calcoli il valore della potenza del processo tempo continuo $x(t)$ il suo coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau)$ e il coefficiente di correlazione del processo discreto $\rho_x[m]$.

b – Il processo x_n viene filtrato con un sistema Lineare Tempo Invariante con risposta all'impulso $h_n=b\delta_{n+1}+a\delta_n+b\delta_{n-1}$ ottenendo il processo y_n. Si trovi l'espressione di h_n per cui il valor medio del processo d'uscita $m_y=3$ e la sua varianza $\sigma_y^2=9$.

c – Si trovi l'espressione della autocorrelazione del processo casuale y_n.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 24 Giugno 2016

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di $x(t)=\left[\dfrac{\sin \pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]^2 \cos(2\pi t)$ si può calcolare a partire da quella del segnale $\left[\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right]^2$ che poi andrà moltiplicata per $\exp\{-j2\pi f\}$, moltiplicata per 1/2 , traslata intorno alle frequenze ± 1 e sommata.

Detta $tri(f)=rect(f)*rect(f)$:

$$X(f)=\frac{1}{2}tri(f-1)\exp\{-j2\pi(f-1)\}+\frac{1}{2}tri(f+1)\exp\{-j2\pi(f+1)\}$$

Questa espressione può essere utilmente semplificata notando che si può portare a fattor comune $\exp\{-j2\pi\}=\exp\{j2\pi\}=1$:

$$X(f)=\frac{1}{2}\exp\{-j2\pi f\}[tri(f-1)+tri(f+1)]$$

b - La trasformata di Fourier del segnale $h(t)=1+\cos(\pi t)$è formata da 3 impulsi di area 1 alla frequenza nulla e di area ½ alle frequenze $f=\pm\frac{1}{2}$.

La trasformata dell'uscita è dunque:

$$Y(f)=X(f)H(f)=X(f)\left[\delta(f)+\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right]=$$
$$\frac{1}{2}tri\left(\frac{1}{2}-1\right)\exp\left\{-j2\pi\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}tri\left(-\frac{1}{2}+1\right)\exp\left\{-j2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right\}\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\exp\{j\pi\}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\exp\{-j\pi\}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=-\frac{1}{8}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)$$

La convoluzione richiesta vale dunque: $y(t)=-\frac{1}{4}\cos(\pi t)$

ESERCIZIO 2

a - La frequenza del coseno è 10 quindi la minima frequenza di campionamento è maggiore di 20.

b – La frequenza di campionamento utilizzata $f_s = 12$ Hz introduce alias. l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale campionato si può convenientemente calcolare passando al dominio della frequenza (lavorare direttamente nel tempo è più complicato).

La trasformata di Fourier del segnale campionato si può ottenere in 2 modi (il primo è più veloce).

- La trasformata del segnale tempo continuo $x(t) = \cos(20\pi(t-\tau))$ è:

$$X(f) = \left[\frac{1}{2}\delta(f+10) + \frac{1}{2}\delta(f-10)\right]\exp\{-j2\pi f\tau\} = \frac{1}{2}\exp\{j2\pi 10\tau\}\delta(f+10) + \frac{1}{2}\exp\{-j2\pi 10\tau\}\delta(f-10)$$

Quella del segnale discreto campionato con $f_s = 12$ Hz vale (teorema del campionamento):

$$\widetilde{X}(f) = \frac{12}{2}\exp\{j2\pi 10\tau\}\delta(f-2) + \frac{12}{2}\exp\{-j2\pi 10\tau\}\delta(f+2)$$

- Il segnale campionato è

$$x_n = \cos\left(20\pi\left(\frac{n}{12} - \tau\right)\right) = \cos\left(2\pi\frac{10}{12}n - 20\pi\tau\right) = \cos\left(-2\pi\frac{2}{12}n - 20\pi\tau\right) = \cos\left(2\pi\frac{2}{12}n + 20\pi\tau\right)$$

La sua trasformata di Fourier per definizione è:

$$\widetilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp\left\{-j2\pi f\frac{n}{12}\right\} = \frac{12}{2}\exp\{j2\pi 10\tau\}\delta(f-2) + \frac{12}{2}\exp\{-j2\pi 10\tau\}\delta(f+2)$$

Ricordando che $\widetilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{-j2\pi f nT\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

Il segnale ricostruito tramite filtro di ricostruzione ideale passa-basso nella banda $f = \pm 6$ Hz con ampiezza $T = \frac{1}{12}$ vale:

$$\hat{x}(t) = \cos(4\pi t + 20\pi\tau) = \cos(4\pi(t + 5\tau))$$

c – Il segnale campionato $x_n = \cos\left(2\pi\frac{2}{12}n + 20\pi\tau\right)$ ha periodo 6. In 60 campioni ci sono esattamente 10 periodi quindi la sua DFT vale:

$$X_k = 30\exp\{-j2\pi 10\tau\}\delta_{k-10} + 30\exp\{j2\pi 10\tau\}\delta_{k-50}$$

ATTENZIONE: formalmente non è lecito dire che $X_k = \widetilde{X}(f)\Big|_{\frac{k}{NT}}$ dove $\widetilde{X}(f)$ è quella trovata al punto precedente che si riferisce ad una sequenza infinita, non di 60 campioni…

ESERCIZIO 3

a – Il processo casuale stazionario $x(t)$ ha densità di probabilità delle ampiezze gaussiana con valor medio unitario e varianza $\sigma_x^2 = C_x(0) = 1$. La sua potenza è $P_{x(t)} = \sigma_x^2 + m_x^2 = 2$.

Il coefficiente di correlazione del processo continuo vale: $\rho_x(\tau) = \dfrac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2} = \dfrac{\sin \pi 10\tau}{\pi 10\tau}$.

Campionando il processo $x(t)$ con intervallo di campionamento $T = 100ms = 10^{-1}s$, si ottengono campioni tra loro indipendenti in quanto $\rho_x[m] = C_x\left(m/10\right) = \dfrac{\sin \pi 10 \, m/10}{\pi 10 \, m/10} = \delta_m$.

b – Il valor medio del processo casuale in uscita è dato da quello dell'ingresso per la somma dei cefficienti della risposta all'impulso del filtro. Dato che i campioni del processo casuale x_n sono tra loro indipendenti, la varianza dell'uscita e' data dalla somma della varianza dei campioni d'ingresso (σ_x^2) moltiplicata per il modulo quadro dei campioni della risposta impulsiva.

Dunque: $\begin{cases} m_y = m_x(a+2b) \\ \sigma_y^2 = \sigma_x^2(a^2+2b^2) \end{cases}$

Dato che sia varianza che valor medio di x_n sono unitari si ottiene il seguente sistema di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} m_y = (a+2b) \\ \sigma_y^2 = (a^2+2b^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} a = m_y - 2b \\ \sigma_y^2 = m_y^2 + 4b^2 - 4bm_y + 2b^2 \end{cases}$$

Dato che $\sigma_y^2 = m_y^2 = 9$ ed escludendo la soluzione banale con $b = 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} a = m_y - 2b \\ 2b(3b - 2m_y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} m_y = -1 \\ b = \dfrac{2}{3} m_y = 2 \end{cases}$$

c – L'autocorrelazione dell'ingresso ha la seguente espressione:

$R_x[m] = \delta_m + 1$

Quella dell'uscita vale dunque:

$$\begin{aligned} R_y[m] &= R_x[m] * h_m * h_{-m} = (\delta_m + 1) * (-\delta_m + 2\delta_{m-1} + 2\delta_{m+1}) * (-\delta_m + 2\delta_{m-1} + 2\delta_{m+1}) = \\ &= (\delta_m + 1) * (9\delta_m - 4\delta_{m-1} - 4\delta_{m+1} + 4\delta_{m-2} + 4\delta_{m+2}) = \\ &= 9\delta_m - 4\delta_{m-1} - 4\delta_{m+1} + 4\delta_{m-2} + 4\delta_{m+2} + 9 \end{aligned}$$