SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI prova del 24 Giugno 2015

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 00 min.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)=\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}\cos\left(10\pi\left(t-\frac{1}{40}\right)\right)$.

a [7/30]- Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza *H(f)*

b [5/30]- Si calcoli l'espressione dell'uscita $y(t)$ del sistema dato ponendo all'ingresso il segnale $x(t)=\frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $x(t)=\sin^2(20\pi t)$

a [4/30]**-** Si trovi il massimo intervallo di campionamento $T_{\max}$ che non generi alias in frequenza.

b [4/30]**-** Si campioni $x(t)$ con $T = {}^{8}\!/_{3}\,T_{\max}$ e si tracci il grafico della Trasformata di Fourier del segnale x_n sia in frequenza, sia in frequenza normalizzata.

c [3/30]**-** Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n .

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale $x(t)$ stazionario gaussiano, continuo, bianco nella banda $-B \le f \le B$. La varianza del processo sia unitaria e la potenza valga 10.

a [6/30]- Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo dato.

b [3/30]– Il processo $x(t)$ viene filtrato con un filtro la cui risposta all'impulso ha la seguente espressione: $h(t)=\left[\frac{\sin(B\pi t)}{\pi t}\right]^2$. Si calcoli la cross-correlazione tra uscita e ingresso del sistema dato.

c [3/30]- Si calcoli la potenza dell'uscita.

TELECOMUNICAZIONI prova del 24 Giugno 2015

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta in frequenza è data dalla seguente convoluzione:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right) * \left[\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(f-5) + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(f+5)\right]$$

Da cui: $|H(f)| = \frac{1}{2}rect\left(\frac{f-5}{4}\right) + \frac{1}{2}rect\left(\frac{f+5}{4}\right)$

$$\prec H(f) = \begin{cases} \pi/4 & -7 \le f \le -3 \\ -\pi/4 & 3 \le f \le 7 \end{cases}$$

b - Il calcolo può essere convenientemente svolto nel dominio della frequenza.

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{10}\right)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}rect\left(\frac{f-4}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}rect\left(\frac{f+4}{2}\right)$$

Anti-trasformando si ottiene:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}e^{j2\pi 4t} + \frac{1}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}e^{-j2\pi 4t} =$$

$$= \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\left[\frac{1}{2}e^{j\left(2\pi 4t - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(2\pi 4t - \frac{\pi}{4}\right)}\right] = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata del segnale dato è:

$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f)-\frac{1}{4}\delta(f-20)-\frac{1}{4}\delta(f+20)$$

A questi risultato si può arrivare sia utilizzando la convoluzione in frequenza tra la trasformata del seno con se stessa, sia ricordando che

$$x(t)=\sin^2(20\pi t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(40\pi t)$$

La massima frequenza del segnale è di 20Hz, quindi la minima frequenza di campionamento è pari a 40Hz e $T_{\max}=\frac{1}{40}$ s.

b - Campionando il segnale dato con $T=\frac{8}{3}\frac{1}{40}=\frac{1}{15}$ s'introduce alias in frequenza.
La trasformata in frequenza ha la seguente espressione:

$$\tilde{X}(f)=\frac{15}{2}\delta(f)-\frac{15}{4}\delta(f-5)-\frac{15}{4}\delta(f+5)$$ periodica di periodo 15

La trasformata in frequenza normalizzata ha la seguente espressione:

$$X(\phi)=\frac{1}{2}\delta(f)-\frac{1}{4}\delta\left(\phi-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\delta\left(\phi+\frac{1}{3}\right)$$ periodica di periodo 1

c - Il segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto avrà dunque la seguente espressione:

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(10\pi t)=\sin^2(5\pi t)$$

ESERCIZIO 3

a – Il processo è bianco in una banda limitata quindi l'autocorrelazione è data da un seno cardinale più eventualmente una costante uguale al valor medio del processo al quadrato. Il quadrato del valor medio del processo si ricava dai dati de problema:

$$P = \sigma_x^2 + m_x^2$$

$$m_x^2 = P - \sigma_x^2 = 10 - 1 = 9$$

Da cui si ricava facilmente che:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2B}\frac{\sin 2\pi B\tau}{\pi\tau} + 9$$

b - La cross-correlazione tra uscita e ingresso ha la seguente espressione:

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

Analizzando la convoluzione nel dominio delle frequenze, si vede subito che la risposta in frequenza del filtro (triangolo di banda $2B$ e altezza B) viene moltiplicata per un rettangolo di banda bilatera uguale a quella della risposta in frequenza stessa. Dunque:

$$S_{yx}(f) = S_x(f)H(f) = \left[\frac{1}{2B}rect\left(f/_{2B}\right) + 9\delta(f)\right]\cdot H(f) = \frac{1}{2B}H(f) + 9B\delta(f)$$

Da cui:

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{2B}\left[\frac{\sin(B\pi t)}{\pi t}\right]^2 + 9B$$

c - La potenza dell'uscita si può calcolare come integrale della densità spettrale di potenza dell'uscita che ha la seguente espressione:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[\frac{1}{2B}rect\left(f/_{2B}\right) + 9\delta(f)\right]\cdot|H(f)|^2$$

$|H(f)|^2$ è simmetrica rispetto all'origine e vale $(B-f)^2$ nella banda $0 \le f \le B$.

Integrando $S_y(f)$ si ottiene la potenza che vale: $P = \dfrac{B^2}{3} + 9B^2$