SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 21 Giugno 2017

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)=\frac{\sin\pi(t-1)}{\pi(t-1)}+\frac{\sin\pi(t+1)}{\pi(t+1)}$

a - Si calcoli l'espressione della risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato e se ne traccino i grafici di modulo e fase.
b - Si calcoli la seguente convoluzione: $y(t)=h(t)*\cos^2(\pi t)$.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t)=\frac{\sin\pi Bt}{\pi t}e^{-j2\pi\frac{B}{2}t}$.

a - Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=4B$ Hz. Trovare l'espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n sia in frequenza $\widetilde{X}(f)$ che in frequenza normalizzata $\widetilde{X}(\phi)$.

b –Trovare l'espressione del segnale tempo continuo $y(t)$ ricostruito dal segnale discreto $y_n=x_{4n}$. (*suggerimento: tutto passa come se il segnale continuo* $x(t)$ *fosse campionato con frequenza di campionamento* $f_s=\ldots$).

c –Si calcoli la DFT dei primi 60 campioni del segnale campionato y_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n bianco con valor medio unitario e varianza σ_x^2.

a - Si scriva l'espressione del coefficiente di correlazione $\rho_x[m]$.
b – Il processo x_n viene filtrato con un sistema LTI con risposta all'impulso $h_n=-\frac{1}{4}\delta_{n+1}+\delta_n+\frac{1}{2}\delta_{n-1}$ ottenendo il processo y_n. Si trovi l'espressione del valor medio del processo casuale y_n.
c – Si trovi il valore di σ_x^2 e l'espressione della autocorrelazione del processo casuale y_n sapendo che la potenza di y_n vale $P_y=\frac{23}{8}$.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 21 Giugno 2017

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La trasformata di $h(t)=\frac{\sin\pi(t-1)}{\pi(t-1)}+\frac{\sin\pi(t+1)}{\pi(t+1)}$ è:

$$H(f)=rect(f)\exp\{-j2\pi f\}+rect(f)\exp\{j2\pi f\}=2rect(f)\cos(2\pi f)$$

Il modulo è $|H(f)|=2rect(f)|\cos(2\pi f)|$

La fase è definita solo nella banda $rect(f)$. In questa banda è nulla in $-\frac{1}{4}<f<\frac{1}{4}$ e uguale a π altrove.

b - La trasformata di Fourier del segnale $x(t)=\cos^2(\pi t)$ è formata da 3 impulsi:

$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f-1)+\frac{1}{4}\delta(f+1)$$

La trasformata dell'uscita è dunque:

$$Y(f)=H(f)X(f)=2rect(f)\cos(2\pi f)\left[\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f-1)+\frac{1}{4}\delta(f+1)\right]=\delta(f)$$

Il risultato della convoluzione richiesta vale dunque: $y(t)=1$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t)=\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}e^{-j2\pi\frac{B}{2}t}$ è $X(f)=rect\left(\frac{f}{B}+\frac{1}{2}\right)$ e per il teorema del campionamento, campionando con $f_s=4B$ si ottiene:

$\widetilde{X}(f)=4Brect\left(\frac{f}{B}+\frac{1}{2}\right)$ periodica di periodo $4B$ in frequenza.

Passando alla frequenza normalizzata $\phi=\frac{f}{f_s}$, si ottiene

$\widetilde{X}(\phi)=4Brect\left(\frac{f_s\phi}{B}+\frac{1}{2}\right)=4Brect\left(4\phi+\frac{1}{2}\right)$ periodica di periodo 1 in frequenza.

b – Il segnale discreto $y_n=x_{4n}$ si può ottenere direttamente da $x(t)$ utilizzando una frequenza di campionamento $f_s=B$ (4 volte minore rispetto a quella utilizzata per ottenere x_n). Dunque:

$\widetilde{Y}(f)=Brect\left(\frac{f}{B}-\frac{1}{2}\right)$ periodica di periodo B in frequenza.

La periodicizzazione a passo B rende $\widetilde{Y}(f)=B$. Questo risultato si può peraltro verificare facilmente scrivendo l'espressione di $y_n=\frac{\sin \pi B\frac{n}{B}}{\pi\frac{n}{B}}e^{-j2\pi\frac{B}{2}\frac{n}{B}}=B\frac{\sin \pi n}{\pi n}e^{-j\pi n}=B\delta_n$

Il segnale tempo continuo ricostruito da $y_n=B\delta_n$ può calcolarsi direttamente nel dominio del tempo:

$y(t)=B\delta(t)*\frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt}=\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}$

Oppure passando dal filtro di ricostruzione nel dominio della frequenza $H_R(f)=\frac{1}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right)$

$Y(f)=\widetilde{Y}(f)H_R(f)=B\frac{1}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right)=rect\left(\frac{f}{B}\right)$ da cui $y(t)=\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}$

c – la DFT dei primi 60 campioni del segnale campionato y_n è banalmente $Y_k=B$ con $0\le k\le 59$.

ESERCIZIO 3

a – Il coefficiente di correlazione di un qualsiasi processo casuale stazionario discreto bianco è per definizione

$\rho_x[m] = \delta_m$.

b – Il valor medio del processo casuale in uscita è dato da quello dell'ingresso per la somma dei cefficienti della risposta all'impulso del filtro.

$$m_y = m_y\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

c – L'autocorrelazione dell'ingresso ha la seguente espressione:

$$R_x[m] = \sigma_x^2\delta_m + 1$$

Quella dell'uscita vale dunque:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\sigma_x^2\delta_m + 1\right) * \left(\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m-1} - \frac{1}{4}\delta_{m+1}\right) * \left(\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m+1} - \frac{1}{4}\delta_{m-1}\right) =$$
$$= \left(\sigma_x^2\delta_m + 1\right) * \left(\frac{21}{16}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1} - \frac{1}{8}\delta_{m-2} - \frac{1}{8}\delta_{m+2}\right) =$$
$$= \sigma_x^2\left(\frac{21}{16}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1} - \frac{1}{8}\delta_{m-2} - \frac{1}{8}\delta_{m+2}\right) + \frac{25}{16}$$

Dato che la potenza dell'uscita è $R_y[0] = \frac{23}{8} = \sigma_x^2\frac{21}{16} + \frac{25}{16}$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{46}{16} - \frac{25}{16}\right)\frac{16}{21} = 1$$

In alternativa si sarebbe potuto ragionare così: dato che i campioni del processo casuale x_n sono tra loro incorrelati, la varianza dell'uscita è data dalla somma della varianza dei campioni d'ingresso (σ_x^2) moltiplicata per il modulo quadro dei campioni della risposta impulsiva.

Dunque: $\sigma_y^2 = \sigma_x^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right) = \sigma_x^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right) = \sigma_x^2\frac{21}{16}$

La potenza dell'uscita è data da $P_y = \sigma_x^2\frac{21}{16} + m_y^2 = \sigma_x^2\frac{21}{16} + \frac{25}{16} = \frac{23}{8}$, da cui $\sigma_x^2 = \left(\frac{46}{16} - \frac{25}{16}\right)\frac{16}{21} = 1$

Poi come sopra: $R_y[m] = \frac{21}{16}\delta_m + \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{4}\delta_{m+1} - \frac{1}{8}\delta_{m-2} - \frac{1}{8}\delta_{m+2} + \frac{25}{16}$