TELECOMUNICAZIONI pre-appello - 19 Giugno 2013

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova e' 2h e 15min.
I punteggi indicano il peso relativo dell'esercizio.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \left[\dfrac{\sin(30\pi(t-1))}{\pi(t-1)}\right]^2$.

a [7/30]- Si traccino i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza *H(f)*

b [4/30]- All'ingresso del sistema dato si pone il segnale $x(t) = \cos(8\pi t)\cos(12\pi t)$. Si calcoli l'espressione dell'uscita *y(t)*.

ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale $y(t) = 14\cos(4\pi t) + 10\cos(20\pi t)$

a [5/30]- Si trovi il massimo intervallo T con cui campionare *y(t)* per evitare alias in frequenza.

b [4/30]**-** Si ricavi l'espressione della trasformata di $y_n = y\left(\dfrac{4}{3}nT\right)$ sia in frequenza sia in frequenza normalizzata.

c [3/30]**-** Si ricavi l'espressione della DFT di $y_n = y\left(\dfrac{4}{3}nT\right)$ con $0 \le n \le 59$.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale continuo *x(t)* stazionario gaussiano con valor medio $m_x = 5$ e autocovarianza $C_x(\tau) = \dfrac{\sin(10\pi\tau)}{\pi\tau}$.

a [5/30]- Si scriva l'espressione della densita' di probabilita' delle ampiezze del processo casuale *x(t)* e se ne calcoli la densità spettrale di potenza.

b [4/30]– Il processo casuale *x(t)* viene campionato con intervallo di campionamento $T = \dfrac{1}{20}$ secondi, ottenendo il processo casuale discreto x_n. Si calcoli la varianza del processo casuale $y_n = x_n - \dfrac{1}{2}x_{n-2}$.

c [3/30]– Si calcoli l'espressione di $E[y_{n+m}x_n]$ in funzione di m.

TELECOMUNICAZIONI pre-appello - 19 Giugno 2013

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - Il modulo della risposta in frequenza *H(f)* e' un triangolo simmetrico rispetto all'origine da -30 a +30 Hz con altezza 30. La fase è lineare negativa con pendenza di -2π rad/Hz.

b - La trasformata di Fourier dell'ingresso si calcola come convoluzione delle trasformate dei due coseni:

$$X(f)=\frac{1}{2}[\delta(f+4)+\delta(f-4)]*\frac{1}{2}[\delta(f+6)+\delta(f-6)]=\frac{1}{4}[\delta(f+2)+\delta(f-2)+\delta(f+10)+\delta(f-10)]$$

La trasformata di Fourier dell'uscita vale:

$$Y(f)=X(f)H(f)=\frac{1}{4}[28\delta(f+2)+28\delta(f-2)+20\delta(f+10)+20\delta(f-10)]\cdot\exp\{-j2\pi f\}$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t)=14\cos(4\pi(t-1))+10\cos(20\pi(t-1))$$

ESERCIZIO 2

a – La massima frequenza del segnale d'uscita e' 10Hz. La frequenza di campionamento deve essere superiore a 20Hz e, quindi, l'intervallo di campionamento deve essere inferiore a 50 millisecondi.

b – Se si utilizza un intervallo di campionamento pari a $\frac{4}{3}T$ (cioè un frequenza di campionamento $f_s=\frac{3}{4}20=15Hz$, l'espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato vale:

$$Y(f)=[105\delta(f+2)+105\delta(f-2)+75\delta(f+5)+75(f-5)]$$

In frequenza normalizzata

$$Y(\phi)=\left[7\delta\left(\phi+\frac{2}{15}\right)+7\delta\left(\phi-\frac{2}{15}\right)+5\delta\left(\phi+\frac{1}{3}\right)+5\delta\left(\phi-\frac{1}{3}\right)\right]$$

c – A causa dell'alias in frequenza la sequenza $y_n = y\left(\frac{4}{3}nT\right)$ è formata dalla somma di 2 coseni di ampiezze 14 e 10 e di frequenze mormalizzate rispettivamente $\frac{2}{15}$ e $\frac{1}{3}$. Si vuole calcolare la DFT di 2 coseni di cui i 60 campioni analizzati contengono esattamente 8 e 20 cicli.

Solo 4 campioni della DFT sono diversi da 0 ed esattamente:

$$Y_k = 420\delta_{k-8} + 420\delta_{k-52} + 300\delta_{k-20} + 300\delta_{k-40}$$

<u>ESERCIZIO 3</u>

a – La densita' di probabilita' delle ampiezze $p_x(a)$ del processo casuale *x(t)* e' gaussiana con valor medio 5 e varianza che si trova come valore dell'autocovarianza in 0: $\sigma_x^2 = C_x(0) = 10$.

Dunque: $p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 10}} \exp\left\{-\frac{(a-5)^2}{20}\right\}$

La densità spettrale dipotenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione

$$R_x(\tau) = C_x(\tau) + |m_x|^2 = \frac{\sin(10\pi\tau)}{\pi\tau} + 25$$

Dunque:

$$S_x(f) = rect\left(\frac{f}{10}\right) + 25\delta(f)$$

b - L'autocovarianza di x_n è nulla per $m = 2$ e quindi x_n e x_{n-2} sono indipendenti. La varianza della differenza è uguale alla somma delle varianze: $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \frac{1}{4}\sigma_x^2 = 12.5$

c – L'espressione di $E[y_{n+m}x_n] = R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m$ in funzione di m si calcola facilmente notando che $y_n = x_n - \frac{1}{2}x_{n-2} = x_n * \left(\delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-2}\right)$.

Dunque: $R_{yx}[m] = \left(20\frac{\sin\left(\pi m/2\right)}{\pi m} + 25\right) * \left(\delta_m - \frac{1}{2}\delta_{m-2}\right) = 20\frac{\sin\left(\pi m/2\right)}{\pi m} - 10\frac{\sin\left(\pi (m-2)/2\right)}{\pi(m-2)} + 12.5$