SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 12 Giugno 2018

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) - rect\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$.

a - Si tracci il grafico della risposta all'impulso data

b- Si trovi l'espressione dell'uscita *y(t)* quando all'ingresso del sistema si pone il segnale
$x(t) = 5 + 2\cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)$

c- L'uscita *y(t)* trovata al punto precedente viene campionata con intervallo di campionamento T ottenendo la sequenza y_n. Si calcoli la DFT dei primi 50 campioni (da *n=0* a *n=49*) del segnale y_n.
*(**Consiglio**: si scriva l'espressione di $y_n = y(nT)$ e ...).*

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin \pi B t}{\pi t} \sin\left(2\pi \frac{B}{2} t\right)$.

a – Trovare la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = \frac{3}{2} B$ Hz. Trovare l'espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato x_n sia in frequenza $\tilde{X}(f)$ che in frequenza normalizzata $\tilde{X}(\phi)$.
*(**Consiglio**: disegnate la trasformata $X(f)$ e poi ottenete graficamente $\tilde{X}(f)$. L'espressione analitica di $\tilde{X}(f)$ sarà poi facile da scrivere).*

c –Trovare l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto x_n.

ESERCIZIO 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n bianco con valor medio unitario e varianza σ_x^2.
Il processo x_n viene filtrato con un sistema LTI con risposta all'impulso $h_n = \delta_{n+1} - 3\delta_n + 2\delta_{n-1}$ ottenendo il processo y_n.

a –Si trovi l'espressione dell'autocorrelazione di y_n.

b – Si trovi valor medio e varianza della media di 2 campioni di y_n.

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 12 Giugno 2018

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta all'impulso è formata da un rettangolo di ampiezza +1 tra –T/2 e +T/2 sommato ad un rettangolo di ampiezza -1 tra 0 e T.

b – La risposta in frequenza del sistema dato ha la seguente espressione:

$$H(f) = \frac{\sin \pi f T}{\pi f} - \frac{\sin \pi f T}{\pi f} \exp\{-j\pi f T\}$$

La trasformata di Fourier dell'ingresso vale:

$$X(f) = 5\delta(f) + \delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)$$

La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{2T}{\pi}(1+j)\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + (1-j)\frac{4T}{\pi}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t) = \frac{4T}{\pi}\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) - \frac{4T}{\pi}\sin\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

c – Campionando l'uscita a passo T si ottiene: $y_n = y(nT) = \frac{4T}{\pi}\cos(\pi n) + \frac{4T}{\pi}\sin(\pi n) = \frac{4T}{\pi}\cos(\pi n)$.

La DFT su 50 campioni vale $Y_k = \frac{4T}{\pi} 50\delta_{k-25}$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t)=\frac{\sin \pi Bt}{\pi t}\sin\left(2\pi \frac{B}{2}t\right)$ è $X(f)=\frac{j}{2}rect\left(\frac{f}{B}+\frac{1}{2}\right)-\frac{j}{2}rect\left(\frac{f}{B}-\frac{1}{2}\right)$. La massima frequenza del segnale è dunque B e per il teorema del campionamento, la minima frequenza di campionamento per evitare alias è $f_s=2B$

b – Campionando il segnale con $f_s=\frac{3}{2}B$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier ha la seguente espressione:

$$\widetilde{X}(f)=\frac{3}{2}B\sum_k \frac{j}{2}rect\left(\frac{f+k\,{}^3\!/_2 B}{B}+\frac{1}{2}\right)-\frac{j}{2}rect\left(\frac{f+k\,{}^3\!/_2 B}{B}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}B\sum_k \frac{j}{2}rect\left(\frac{1}{B}\left(f+k\,{}^3\!/_2 B+\frac{B}{2}\right)\right)-\frac{j}{2}rect\left(\frac{1}{B}\left(f+k\,{}^3\!/_2 B-\frac{B}{2}\right)\right)$$

All'interno della banda compresa tra $-\frac{f_s}{2}$ e $+\frac{f_s}{2}$ (cioè tra $-\frac{3}{4}B$ e $+\frac{3}{4}B$) la trasformata ha la seguente espressione:

$$\widetilde{X}(f)=j\frac{3B}{4}rect\left(\frac{2f}{B}+\frac{1}{2}\right)-j\frac{3B}{4}rect\left(\frac{2f}{B}-\frac{1}{2}\right) \quad \text{periodica di periodo } \frac{3B}{2}$$

Passando alla frequenza normalizzata $\phi=\frac{f}{f_s}$, si ottiene

$$\widetilde{X}(\phi)=j\frac{3B}{4}rect\left(\frac{2f_s\phi}{B}+\frac{1}{2}\right)-j\frac{3B}{4}rect\left(\frac{2f_s\phi}{B}-\frac{1}{2}\right)=j\frac{3B}{4}rect\left(3\phi+\frac{1}{2}\right)-j\frac{3B}{4}rect\left(3\phi-\frac{1}{2}\right) \quad \text{di}$$

periodo 1.

c – Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando un solo periodo di $\widetilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s}$.

Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f)={}^j\!/_2\, rect\left(\frac{2f}{B}+\frac{1}{2}\right)-{}^j\!/_2\, rect\left(\frac{2f}{B}-\frac{1}{2}\right)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t)=\frac{\sin \pi\,{}^B\!/_2\, t}{\pi t}\sin\left(2\pi\frac{B}{4}t\right)$

ESERCIZIO 3

a – L'autocorrelazione del processo dato ha la seguente espressione:

$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + 1$.

L'autocorrelazione del processo y_n ha la seguente espressione:

$$
\begin{aligned}
R_y[m] &= R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\sigma_x^2 \delta_m + 1\right) * \left(\delta_{n+1} - 3\delta_n + 2\delta_{n-1}\right) * \left(-2\delta_{n+1} - 3\delta_n + \delta_{n-1}\right) = \\
&= \left(\sigma_x^2 \delta_m + 1\right) * \left(14\delta_m - 9\delta_{m-1} - 9\delta_{m+1} + 2\delta_{m-2} + 2\delta_{m+2}\right) = \\
&= \sigma_x^2 \left(14\delta_m - 9\delta_{m-1} - 9\delta_{m+1} + 2\delta_{m-2} + 2\delta_{m+2}\right)
\end{aligned}
$$

Il valor medio di y_n è nullo.

b – Il valor medio della media aritmetica di 2 campioni di y_n è ovviamente nullo.
La varianza coincide quindi con il valore quadratico medio. Se si considerano 2 campioni consecutivi (distanza 1):

$$
\sigma^2 = E\left[\frac{1}{4}\left(y_n + y_{n-1}\right)^2\right] = \frac{1}{2} R_y[0] + \frac{1}{2} R_y[1] = 7\sigma_x^2 - \frac{9}{2}\sigma_x^2 = \frac{5}{2}\sigma_x^2
$$

Se i campioni sono a distanza 2 …
Se invece si considerano campioni a distanza superiore a 2 …