SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 7 Giugno 2019

La prima parte degli esercizi presenta una difficolta' minore rispetto alle successive: se s'incontrano difficolta' nello svolgere un esercizio si consiglia di passare al successivo e rimandare le difficolta'.
Il tempo massimo per lo svolgimento della prova è 2h.

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con risposta all'impulso data dalla seguente convoluzione:

$$h(t) = rect\left(\frac{B}{2}\left(t - \frac{1}{2B}\right)\right) * \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t}.$$

a - Si calcoli l'espressione risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato.

b - Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$.

c - Si trovi l'espressione dell'uscita *y(t)* quando all'ingresso del sistema si pone il segnale

$$x(t) = 3\cos^2\left(2\pi \frac{B}{4} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo continuo $x(t) = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2 \cos(4\pi t + \varphi)$.

a – Trovare la minima frequenza di campionamento per evitare alias in frequenza.

b – Il segnale dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 2$ Hz. Trovare l'espressione della trasformata di Fourier del segnale discreto x_n.

c – Si trovi l'espressione del segnale tempo continuo ricostruito dal segnale discreto x_n.

ESERCIZIO 3

Il processo casuale stazionario tempo continuo reale $x(t)$ è bianco nella banda $-20Hz \le f \le 20Hz$ e ha valor medio unitario e varianza uguale a 10.

a –Si scrivano le espressioni di autocorrelazione e coefficiente di correlazione del processo dato.

b – Si disegni il grafico della densità spettrale di potenza di $y(t) = x(t) - x\left(t + \frac{1}{40}\right)$.

c – Si dica per quali valori di T è massima la potenza del processo casuale $y(t) = x(t) - x(t+T)$.
(*suggerimento: conviene rimanere nel dominio del tempo*)

SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI (Prati)
Pre-Appello – 7 Giugno 2019

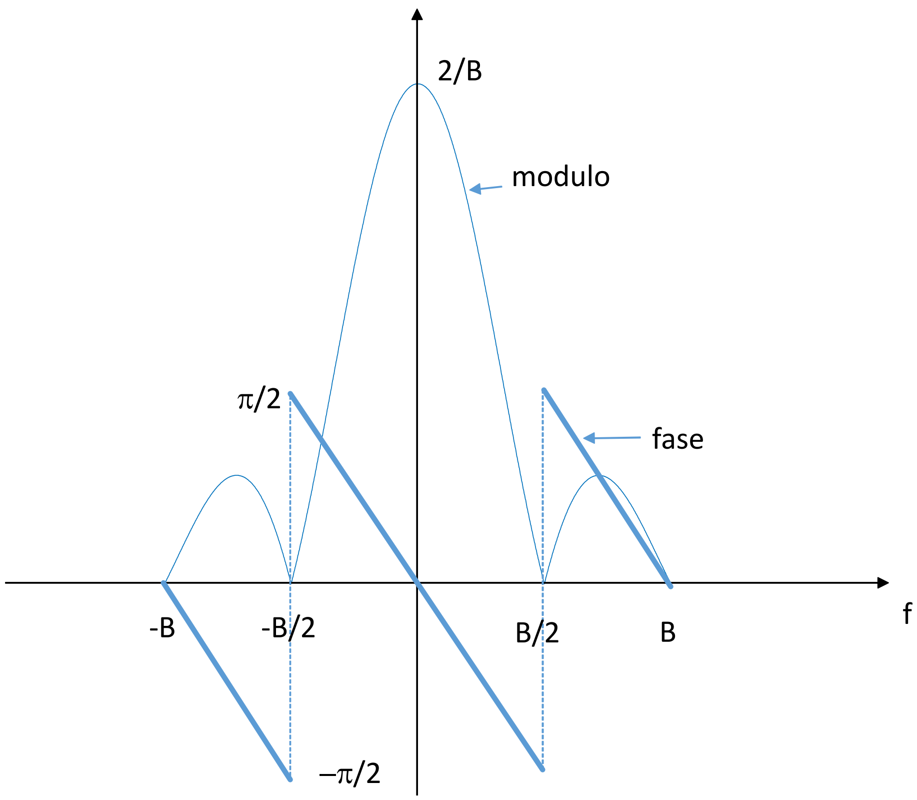
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a – La risposta in frequenza del sistema dato ha la seguente espressione:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)\frac{\sin\left(\pi \, {}^{2}\!/_{B}\, f\right)}{\pi f}e^{-j2\pi f\frac{1}{2B}}$$

b – Grafici di modulo e fase di $H(f)$



c – La trasformata di Fourier dell'ingresso $x(t)=3\cos^2\left(2\pi\frac{B}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\left[1+\cos\left(2\pi\frac{B}{2}t+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ vale:

$$X(f)=\frac{3}{2}\delta(f)+\frac{3}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}\delta\left(f-\frac{B}{2}\right)+\frac{3}{4}e^{-j\frac{2\pi}{3}}\delta\left(f+\frac{B}{2}\right)$$

La trasformata dell'uscita vale dunque:

$$Y(f)=X(f)H(f)=\frac{3}{2}\delta(f)\cdot\frac{2}{B}=\frac{3}{B}\delta(f)$$

L'uscita ha la seguente espressione:

$$y(t)=\frac{3}{B}$$

ESERCIZIO 2

a - La trasformata di $x(t)=\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2\cos(4\pi t+\varphi)$ è $X(f)=\frac{1}{2}e^{-j\varphi}tri(f+2)+\frac{1}{2}e^{j\varphi}tri(f-2)$ dove si è definito $tri(f)=rect(f)*rect(f)$. La massima frequenza del segnale è dunque 3Hz e per il teorema del campionamento, la minima frequenza di campionamento per evitare alias è $f_s=6$

b – Campionando il segnale con $f_s=2$ si ottiene il segnale x_n la cui trasformata di Fourier ha la seguente espressione:

$$\tilde{X}(f)=2\sum_k\frac{1}{2}e^{-j\varphi}tri(f+2+2k)+\frac{1}{2}e^{j\varphi}tri(f-2+2k)=2\cos(\varphi)tri(f) \quad \text{di periodo 2}$$

c – Il segnale tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n si ottiene antitrasformando $\tilde{X}(f)$ moltiplicata per $\frac{1}{f_s}=\frac{1}{2}$ nella banda $-\frac{f_s}{2}\le f\le\frac{f_s}{2}$ cioè nella banda $-1\le f\le 1$

Quindi la trasformata del segnale ricostruito sarà:

$$X_R(f)=\cos(\varphi)tri(f)$$

Il segnale ricostruito: $x_R(t)=\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2\cos(\varphi)$

ESERCIZIO 3

a – La potenza del processo è $P = \sigma_x^2 + m_x^2 = 11$

La densità spettrale di potenza del processo dato ha la seguente espressione:

$$S_x(f) = A \cdot rect\left(\frac{f}{40}\right) + \delta(f)$$

La potenza è dunque: $P = 11 = 40 \cdot A + 1$

Da qui $A = 1/4$.

L'autocorrelazione del processo dato ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{4}\frac{\sin \pi 40\tau}{\pi\tau} + 1 .$$

Il coefficiente di correlazione:

$$\rho_x(\tau) = \frac{\sin \pi 40\tau}{\pi 40\tau}$$

b – Il processo $y(t) = x(t) - x\left(t + \frac{1}{40}\right)$ può scriversi anche come

$$y(t) = x(t) * \left[\delta(t) - \delta\left(t + \frac{1}{40}\right)\right] = x(t) * h(t)$$

Dunque la densità spettrale di potenza cercata si calcola dalla nota formula:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \left[2 - 2\cos\left(2\pi \frac{1}{40} f\right)\right]\frac{1}{4} \cdot rect\left(\frac{f}{40}\right)$$

c – La potenza di $y(t) = x(t) - x(t + T)$ può essere calcolata come:

$$P_y = E\left[y^2(t)\right] = E\left[x^2(t) + x^2(t+T) - 2x(t)x(t+T)\right] = 2R_x(0) - 2R_x(T) = 20 - \frac{1}{2}\frac{\sin \pi 40T}{\pi T}$$

Questa è ovviamente massima pari quando il seno cardinale è massimo negativo, da cui

$\pi 40T = \frac{3}{2}\pi$ e quindi $T = \pm\frac{3}{80}$