

Segnali per le comunicazioni – Dry_test del 20/5/2026

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 2 \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t} \cos(\pi Bt + 3\pi/4)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$

C) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = h(t) * \left(\frac{\sin(\pi B/2t)}{\pi t} \right)^2$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = (\cos(4\pi t + \theta))^2$ con frequenza di campionamento $f_s = 5$.

A) Si tracci il grafico della trasformata di Fourier in frequenza normalizzata del segnale x_n .

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n .

C) Si trovi l'espressione della DFT dei primi 10 campioni di $x_R(n)$.

Esercizio 3 (da fare)

Sia dato il processo casuale stazionario continuo $x(t)$ con densità di probabilità uniforme, con valor medio $m_x = 2$ e autocovarianza $C_x(\tau) = \left(\frac{\sin(\pi 12\tau)}{\pi \tau} \right)^2$.

A – Si trovi l'espressione della densità spettrale di potenza del processo dato.

B - Si calcoli valor medio e varianza della media aritmetica di 50 campioni del processo $y_n = x\left(\frac{n}{4}\right)$

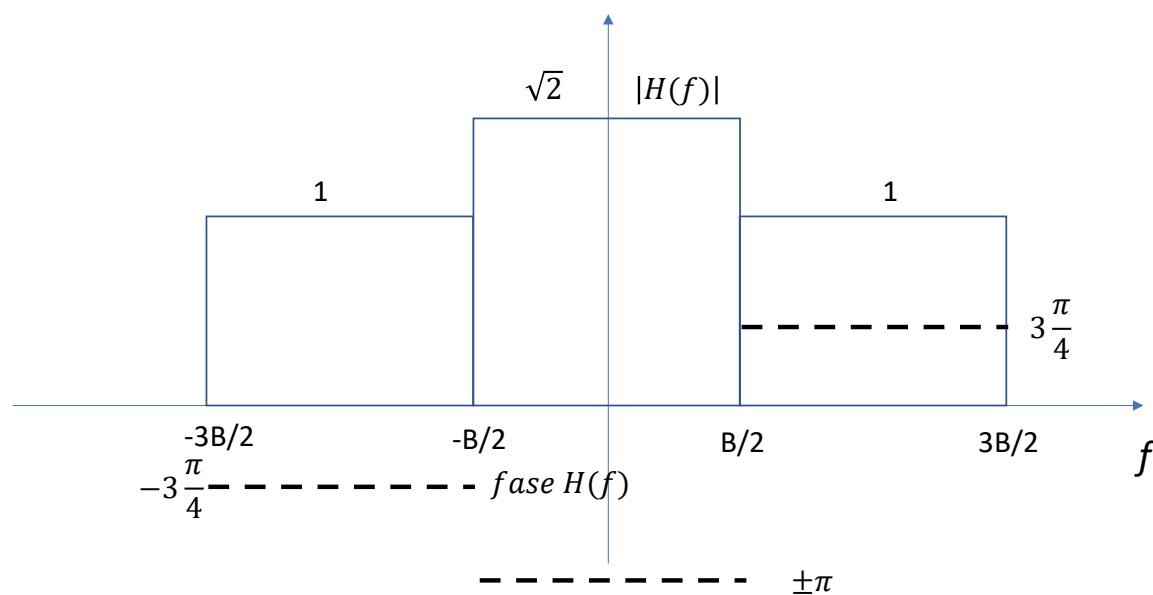
C – Si forma il processo casuale z_n azzerando sistematicamente tutti i campioni negativi di y_n . Si trovi la densità di probabilità delle ampiezze del processo z_n .

Soluzione Esercizio 1 del 20/5/2026

A) La trasformata di Fourier di $h(t) = 2 \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t} \cos(\pi Bt + 3\pi/4)$ ha la seguente espressione:

$$H(f) = e^{-i3\pi/4} \text{rect}\left(\frac{f+B/2}{2B}\right) + e^{i3\pi/4} \text{rect}\left(\frac{f-B/2}{2B}\right)$$

B) I grafici di modulo e fase della risposta in frequenza sono i seguenti



C) Nel dominio delle frequenze

$$Y(f) = X(f)H(f) = X(f) \cdot \left[e^{-i\pi/4} \text{rect}\left(\frac{f}{2B} + \frac{1}{4}\right) + e^{i\pi/4} \text{rect}\left(\frac{f}{2B} - \frac{1}{4}\right) \right]$$

La trasformata dell'uscita è limitata tra $-B/2$ e $B/2$ dove $H(f) = 2\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ è costante.

Dunque

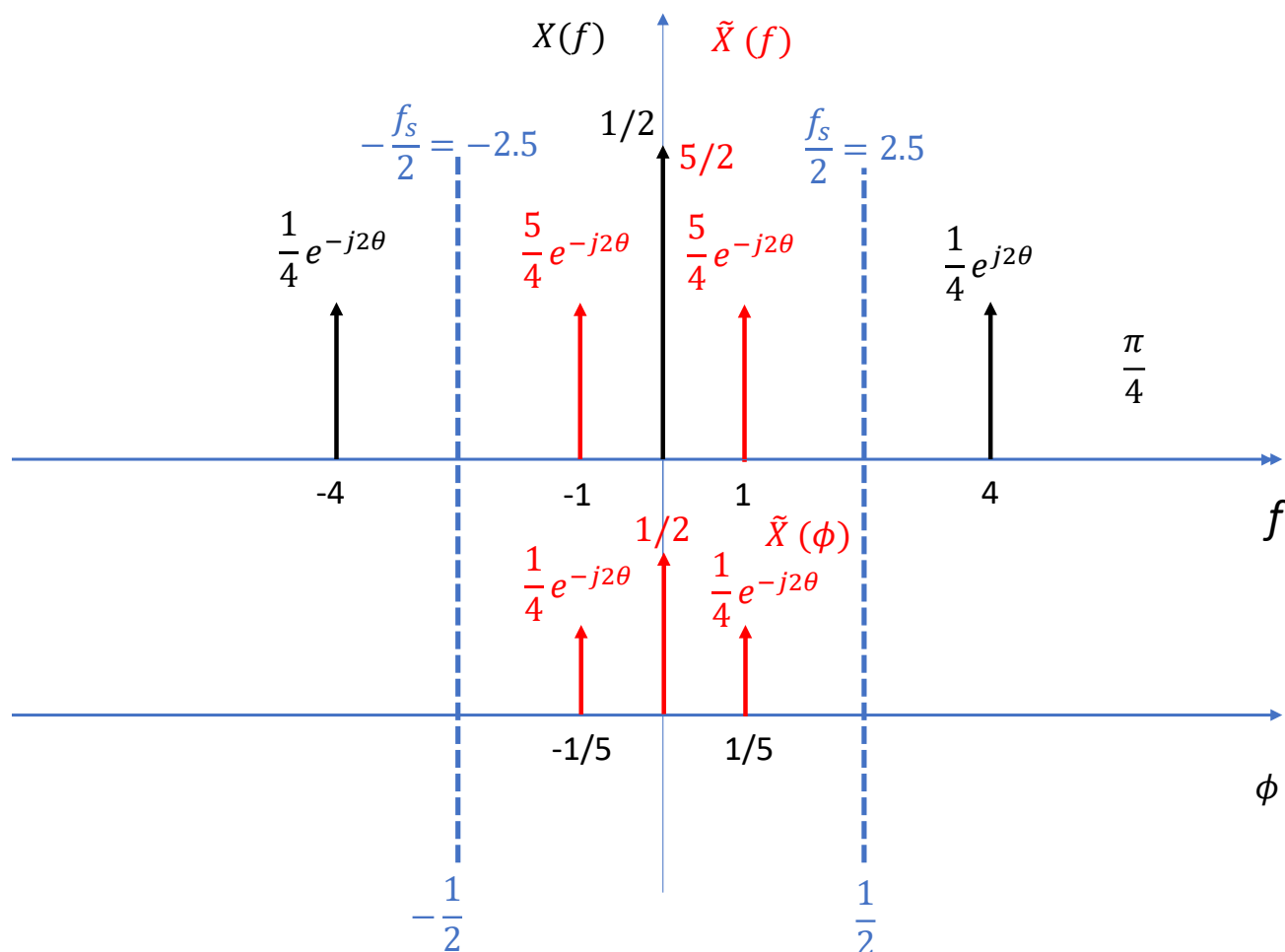
$$y(t) = -\sqrt{2} \left(\frac{\sin(\pi B/2t)}{\pi t} \right)^2$$

Soluzione Esercizio 2 del 20/5/2026

A) La trasformata di $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}e^{i2\theta}\delta(f-4) + \frac{1}{4}e^{-i2\theta}\delta(f+4)$$

Con la frequenza di campionamento $f_s = 5$ si introduce alias:



B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}e^{-i2\theta}\delta(f-1) + \frac{1}{2}e^{i2\theta}\delta(f+1)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = (\cos(\pi t - \theta))^2$$

C) $x_R(n) = (\cos(\pi n - \theta))^2 = (\cos(\theta))^2$

La DFT su 10 campioni è $X_k = 10(\cos(\theta))^2\delta_k$

Soluzione Esercizio 3 del 20/5/2026

a – l'autocorrelazione del processo dato è:

$$R_x(\tau) = \left(\frac{\sin(\pi 12\tau)}{\pi\tau} \right)^2 + 4$$

La densità spettrale di potenza è dunque:

$$S_x(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{12}\right) * \text{rect}\left(\frac{f}{12}\right) + 4\delta(f)$$

b - Il calcolo del valor medio della media aritmetica di 50 campioni del processo $y_n = x\left(\frac{n}{4}\right)$ è banale essendo $m_y = \frac{1}{50} 50 m_x = m_x$.

Per il calcolo della varianza è utile notare che i valori del processo dato sono incorrelati a passo $\tau = 1/12$ dove l'autocovarianza si annulla. Avendo campionato il processo con $T = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, tutti campioni di y_n sono tra loro incorrelati e dunque la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{50^2} 50 \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{50}$$

c - La densità di probabilità $f_y(a)$ delle ampiezze del processo casuale y_n è uniforme con $m_x = 2$ e varianza $C_x(0) = 144$. Quindi è una uniforme centrata in $a=2$ e con $\frac{\Delta^2}{12} = 144$ quindi con $\Delta = 12\sqrt{12}$. L'uniforme va da $2 - 6\sqrt{12}$ a $2 + 6\sqrt{12}$. Quindi tutti valori di y_n tra $2 - 6\sqrt{12}$ e 0 vengono "deterministicamente azzerati" e dunque generano un impulso in 0 nella densità di probabilità delle ampiezze. L'area dell'impulso in 0 è data dalla probabilità di $y_n < 0$ cioè dall'area sottesa da $f_y(a)$ tra $2 - 6\sqrt{12}$ e 0:

$$f_z(a) = \frac{|2 - 6\sqrt{12}|}{12\sqrt{12}} \delta(a) + \frac{1}{12\sqrt{12}} \text{rect}\left(\frac{(a - 1 + 3\sqrt{12})}{2 + 6\sqrt{12}}\right)$$