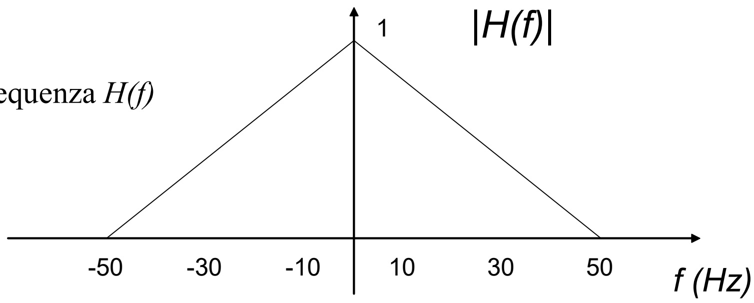
Segnali per le Comunicazioni (Dry test del 21/5/21)

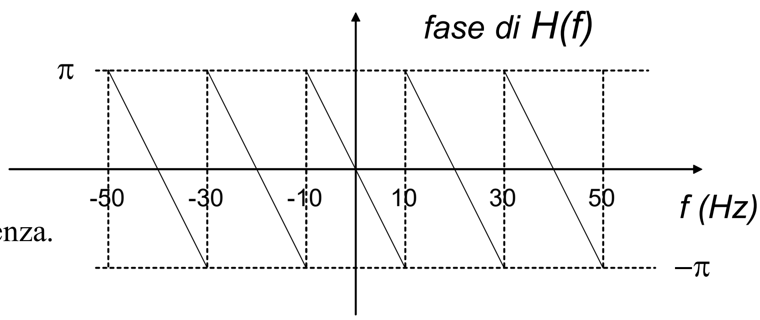
ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema LTI con la risposta in frequenza *H(f)* mostrata nella figura a lato.



a - Si calcoli l'espressione della risposta all'impulso *h(t)* nel caso in cui la fase di *H(f)* sia nulla.

b - Si calcoli l'espressione della risposta all'impulso *h(t)* nel caso in cui la fase di *H(f)* sia quella mostrata nel grafico.



c – Si trovi l'espressione dell'uscita *y(t)* quando l'ingresso è $x(t) = 10 + \cos(50t)$ e se ne calcoli la potenza.

ESERCIZIO 2

Sia dato il segnale tempo-continuo *x(t)* con la seguente trasformata di Fourier:
$X(f) = rect\left(\frac{2f}{f_s}\right) - \frac{j}{2}\delta\left(f - \frac{3}{4}f_s\right) + \frac{j}{2}\delta\left(f + \frac{3}{4}f_s\right)$. Il segnale *x(t)* viene campionato a passo $T = \frac{1}{f_s}$ ottenendo la sequenza x_n.

a - Si traccino il grafici della trasformata di Fourier del segnale *x(t)* e della sequenza x_n sia in frequenza *f* sia in frequenza normalizzata ϕ.

b – Si calcoli l'espressione del segnale tempo continuo ottenuto tramite filtro di ricostruzione ideale dal segnale $x_c(t)$ (campionato idealmente da *x(t)*).

ESERCIZIO 3

Si consideri la seguente sequenza lunga *N=100* campioni $x_n = A\cos\left(2\pi\frac{n}{50}\right)(u_n - u_{n-100})$

a - Si scriva l'espressione della DFT della sequenza x_n.

b - Si calcoli l'energia della sequenza x_n.

c –Si calcoli l'espressione della seguente convoluzione circolare: $y_n = x_n \otimes \cos\left(2\pi\frac{n}{100}\right)(u_n - u_{n-100})$.

ESERCIZIO 4

Sia dato un processo casuale tempo-continuo *x(t)* gaussiano a valor medio m_x e varianza σ_x^2. Il coefficiente di correlazione ha la seguente espressione: $\rho_x(\tau) = T \frac{\sin\left(\pi \tau / T\right)}{\pi \tau}$.

a - Si calcoli la potenza del processo *x(t)* e del processo discreto x_n ottenuto campionando *x(t)* con intervallo di campionamento T.

b – Il processo casuale x_n viene filtrato con la seguente risposta all'impulso $h_n = -\frac{1}{4}\delta_{n+1} + \frac{1}{2}\delta_n - \frac{1}{4}\delta_{n-1}$. Si calcolino le espressioni dell'autocorrelazione e della densità spettrale di potenza del processo filtrato y_n.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a - La risposta all'impulso *h(t)* si calcola come trasformata inversa della risposta in frequenza *H(f)*. Questa può essere vista come la convoluzione di due rettangoli uguali:

$$H(f)=\frac{1}{\sqrt{50}}rect\left(\frac{f}{50}\right)*\frac{1}{\sqrt{50}}rect\left(\frac{f}{50}\right)$$

La risposta all'impulso è data dal prodotto delle due trasformate inverse:

$$h(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\frac{\sin\pi 50t}{\pi t}\right)^2=\frac{1}{50}\left(\frac{\sin\pi 50t}{\pi t}\right)^2$$

Si verifica facilmente che, secondo la proprietà dei valori in zero, $h(0)=50$ che coincide con l'area del triangolo che rappresenta la risposta in frequenza *H(f)*.

b - La risposta in frequenza è uguale a quella del punto precedente moltiplicata per $\exp\left\{-j2\pi f\frac{1}{20}\right\}$.
La risposta impulsiva risulta così ritardata di 50 ms. rispetto al caso precedente:

$$h(t)=\frac{1}{50}\left(\frac{\sin\pi 50\left(t-\frac{1}{20}\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{20}\right)}\right)^2$$

c – La trasformata di Fourier dell'uscita y(t) è data dal prodotto della trasformata dell'ingresso e della risposta in frequenza. La frequenza del coseno è 50/(2π) cioè circa 8 Hz, quindi:

$$Y(f)=X(f)H(f)=\left[10\delta(f)+\frac{1}{2}\delta(f-8)+\frac{1}{2}\delta(f+8)\right]H(f)=$$

$$=10H(0)\delta(f)+\frac{1}{2}H(8)\delta(f-8)+\frac{1}{2}H(-8)\delta(f+8)\approx 10\delta(f)+\frac{21}{50}e^{-j\frac{4}{5}\pi}\delta(f-8)+\frac{21}{50}e^{j\frac{4}{5}\pi}\delta(f+8)$$

da cui:

$$y(t)=10+\frac{21}{50}e^{-j\frac{4}{5}\pi}\exp\{j50t\}+\frac{21}{50}e^{j\frac{4}{5}\pi}\exp\{-j50t\}=10+\frac{21}{25}\cos\left(50t-\frac{4}{5}\pi\right)$$

La potenza di *y(t),* che' e' periodico di periodo *T =1/50*, si calcola dalla definizione:

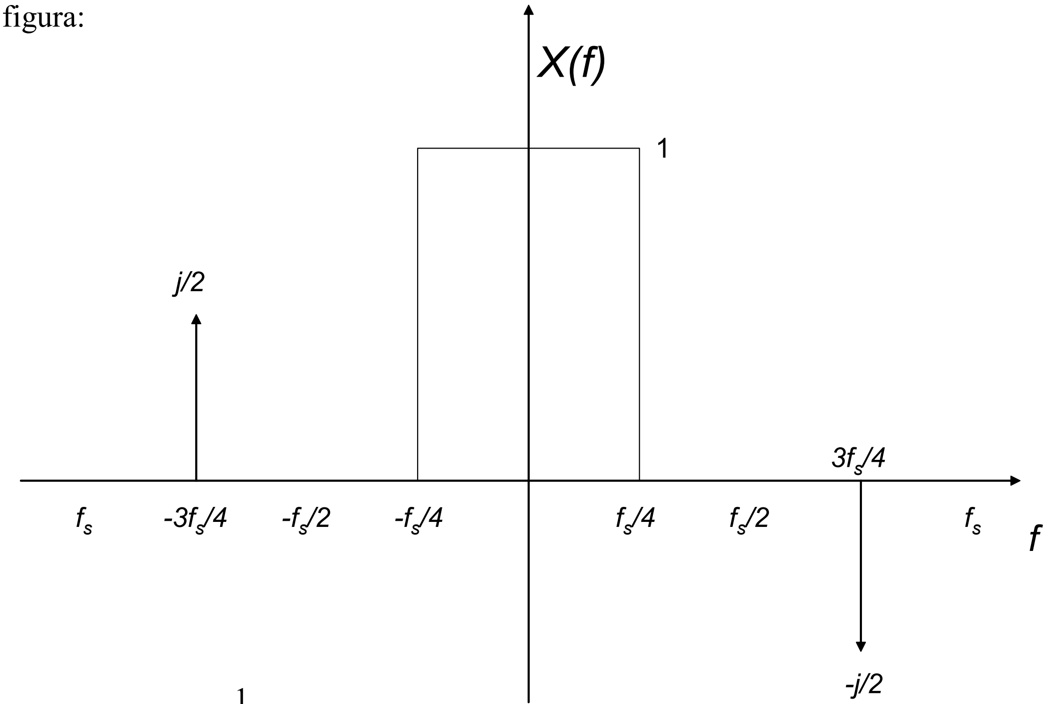
$$P_{y(t)}=\frac{1}{T}\int_T|y(t)|^2dt=50\int_{(1/50)}\left[10+\frac{21}{25}\cos\left(50t-\frac{4}{5}\pi\right)\right]^2dt=$$

$$50\int_{(1/50)}100+\left(\frac{21}{25}\right)^2\cos^2\left(50t-\frac{4}{5}\pi\right)+\frac{84}{5}\cos\left(50t-\frac{4}{5}\pi\right)dt=50\int_{(1/50)}100+\left(\frac{21}{25}\right)^2\cos^2\left(50t-\frac{4}{5}\pi\right)dt=100+\frac{1}{2}\left(\frac{21}{25}\right)^2$$

Quindi la potenza è uguale alla somma della potenza della costante più quella del coseno

ESERCIZIO 2

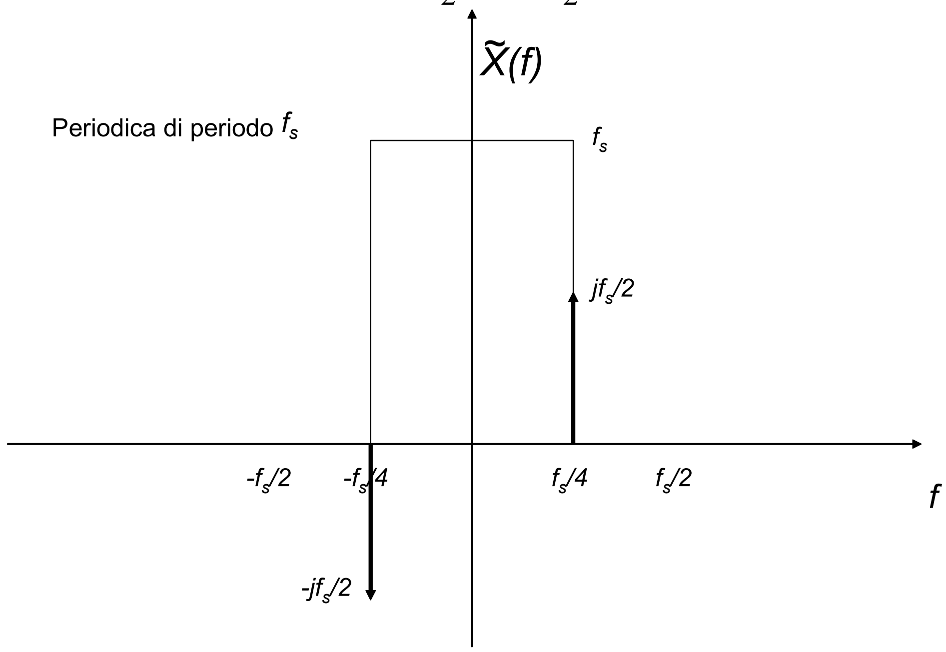
a - Il grafico della trasformata di Fourier *X(f)* del segnale tempo continuo *x(t)* e' mostrato nella seguente figura:



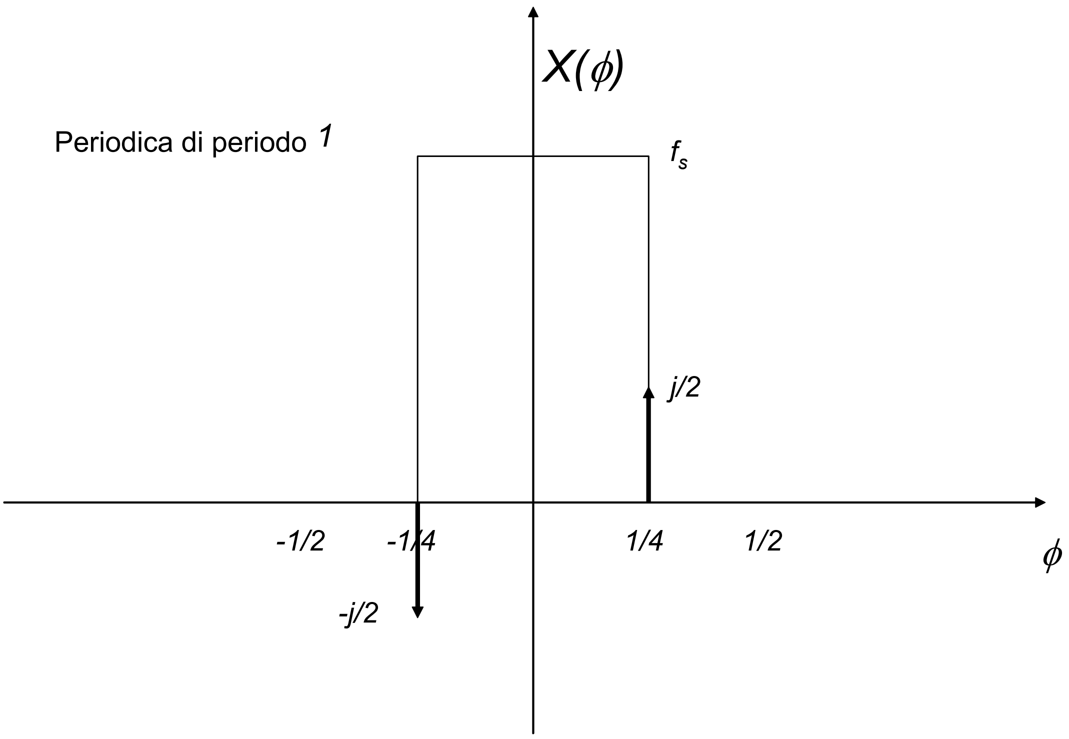
Campionando a passo $T = \frac{1}{f_s}$ si ottiene la sequenza x_n che ha la seguente trasformata periodica di periodo f_s:

$$\widetilde{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{2(f - kf_s)}{f_s}\right) - \frac{j}{2}\delta\left(f - kf_s - \frac{3}{4}f_s\right) + \frac{j}{2}\delta\left(f - kf_s + \frac{3}{4}f_s\right)$$

Il grafico della trasformata di x_n nell'intervallo $-\frac{f_s}{2} \le f \le \frac{f_s}{2}$ è dunque:



Passando alla frequenza normalizzata si ottiene il seguente grafico di $X(\phi)$ nell'intervallo $-\frac{1}{2} \le \phi \le \frac{1}{2}$



Si noti che passando dalla frequenza a quella normalizzata l'area degli impulsi è stata divisa per f_s in base alla nota proprietà di scalatura degli impulsi:

$$\delta(f) = \delta(f_s\phi) = \frac{1}{f_s}\delta(\phi)$$

b –La trasformata di Fourier del segnale tempo continuo ottenuto tramite filtro di ricostruzione ideale dal segnale $x_c(t)$ (campionato idealmente da $x(t)$) si ottiene moltiplicando $\widetilde{X}(f)$ per un rettangolo di banda f_s e ampiezza $T = \frac{1}{f_s}$. Dunque la trasformata di Fourier del segnale ricostruito *y(t)* ha la seguente espressione:

$$Y(f) = rect\left(\frac{2f}{f_s}\right) + \frac{j}{2}\delta\left(f - \frac{1}{4}f_s\right) - \frac{j}{2}\delta\left(f + \frac{1}{4}f_s\right)$$

Il segnale *y(t)* si ottiene antitrasformando *Y(f):*

$$y(t) = \frac{\sin \pi \frac{f_s}{2} t}{\pi t} - \frac{j}{2}\exp\left(-j\pi \frac{f_s}{2} t\right) + \frac{j}{2}\exp\left(j\pi \frac{f_s}{2} t\right) = \frac{\sin \pi \frac{f_s}{2} t}{\pi t} - \sin\left(\pi \frac{f_s}{2} t\right)$$

ESERCIZIO 3

a - La sequenza $x_n = A\cos\left(2\pi \frac{n}{50}\right)(u_n - u_{n-100})$ contiene 2 cicli esatti del coseno. La sua DFT avra' dunque la semplice espressione: $X_k = 50A\delta_{k-2} + 50A\delta_{k-98}$

b - L'energia della sequenza x_n si calcola immediatamente dalla relazione di Parseval che afferma:

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 = \frac{A^2}{100}\left(50^2 + 50^2\right) = 50A^2$$

c –La DFT della convoluzione circolare di 2 sequenze è data dal prodotto delle rispettive DFT. La sequenza $\cos\left(2\pi \frac{n}{100}\right)(u_n - u_{n-100})$ contiene un ciclo esatto del coseno. La sua DFT avrà dunque la semplice espressione: $50\delta_{k-1} + 50\delta_{k-99}$.
Moltiplicando le due DFT si ottiene una sequenza di 100 campioni nulli e dunque anche il segnale $y_n = x_n \otimes \cos\left(2\pi \frac{n}{100}\right)(u_n - u_{n-100})$ sarà nullo.

ESERCIZIO 4

a - La potenza di un processo casuale è uguale al suo valore quadratico medio. Quindi:
$P_x = E\left[|x(t)|^2\right] = \sigma_x^2 + |m_x|^2$ sia per il processo continuo che per quello discreto.
L'autocovarianza del processo continuo si ricava immediatamente dalla definizione di coefficiente di correlazione:

$$\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}$$

da cui si ottiene:

$$C_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) = \sigma_x^2 T \frac{\sin\left(\pi \tau/T\right)}{\pi\tau}$$

L'autocovarianza del processo discreto si ottiene campionando quella del processo continuo a passo T, ottenendo:

$$C_x[m] == \sigma_x^2 T \frac{\sin\left(\pi\, mT/T\right)}{\pi m T} = \sigma_x^2 \delta_m$$

Conseguentemente l'autocorrelazione del processo discreto ha la seguente espressione:

$$R_x[m] = \sigma_x^2 \delta_m + |m_x|^2$$

b - L'autocorrelazione dell'uscita è data da:

$$R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m} = \left(\sigma_x^2 \delta_m + |m_x|^2\right) * \left(\frac{1}{16}\delta_{m+2} - \frac{1}{4}\delta_{m+1} + \frac{3}{8}\delta_m - \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{16}\delta_{m-2}\right) =$$
$$= \sigma_x^2\left(\frac{1}{16}\delta_{m+2} - \frac{1}{4}\delta_{m+1} + \frac{3}{8}\delta_m - \frac{1}{4}\delta_{m-1} + \frac{1}{16}\delta_{m-2}\right)$$

La densità spettrale di potenza è data dalla trasformata di Fourier dell'autocorrelazione e vale:

$$S_y(\phi) = \sigma_x^2\left(\frac{1}{8}\cos(4\pi\phi) - \frac{1}{2}\cos(2\pi\phi) + \frac{3}{8}\right)$$