

Segnali per le comunicazioni – Appello del 27/8/2026

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 2 \left[\frac{\sin(\pi(t-1/2))}{\pi(t-1/2)} \right]^2 \sin\left(2\pi \frac{1}{2}t\right)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$

C) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = h(t) * \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi t}$ con frequenza di campionamento $f_s = 3/2$ ottenendo il segnale x_n .

A) Si tracci il grafico della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ del segnale x_n .

B) Si trovi l'espressione del segnale ricostruito $x_R(t)$.

C) Si supponga di campionare nuovamente il segnale ricostruito $x_R(t)$ del punto precedente con una nuova frequenza di campionamento sufficientemente alta da rispettare il teorema del campionamento, ottenendo una nuova sequenza x_n . E' possibile ricostruire il segnale $x(t)$ a partire da questa nuova sequenza?

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo $x(t)$ con densità spettrale di potenza

$$S_x(f) = \left[\frac{\sin(\pi B t)}{\pi t} \right]^2 + 16\delta(f)$$

A – Si trovi l'espressione del coefficiente di correlazione del processo dato.

B – Si tracci il grafico della funzione di autocorrelazione del processo $y(t) = x(t) - x(t + B)$.

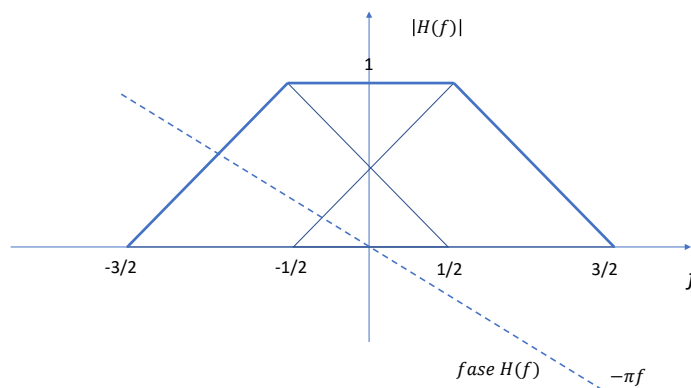
C – Si calcoli il coefficiente di correlazione del processo y_n ottenuto campionando $y(t)$ a passo $T = 2B$

Soluzione Esercizio 1 del 27/8/2026

A) La trasformata di Fourier di $h(t) = 2 \left[\frac{\sin(\pi(t-1/2))}{\pi(t-1/2)} \right]^2 \sin\left(2\pi \frac{1}{2} t\right)$ ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} H(f) &= e^{-i2\pi \frac{1}{2} f} \text{tri}(f) * \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \delta\left(f + \frac{1}{2}\right) + e^{-i\frac{\pi}{2}} \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \right) = \\ &= e^{-i2\pi \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{2}\right)} e^{i\frac{\pi}{2}} \text{tri}\left(f + \frac{1}{2}\right) + e^{-i2\pi \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{tri}\left(f - \frac{1}{2}\right) = \\ &= e^{-i\pi f} \left[\text{tri}\left(f + \frac{1}{2}\right) + \text{tri}\left(f - \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

B) I grafici di modulo e fase sono:



C) Nel dominio delle frequenze: la trasformata di $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ è un rettangolo di ampiezza unitaria da $-1/2$ a $1/2$. La trasformata risultante dalla moltiplicazione in frequenza è un rettangolo tra $-1/2$ e $1/2$ di con la stessa fase di $H(f)$.

Dunque: $y(t) = \frac{\sin(\pi(t-1/2))}{\pi(t-1/2)}$

Soluzione Esercizio 2 del 27/8/2026

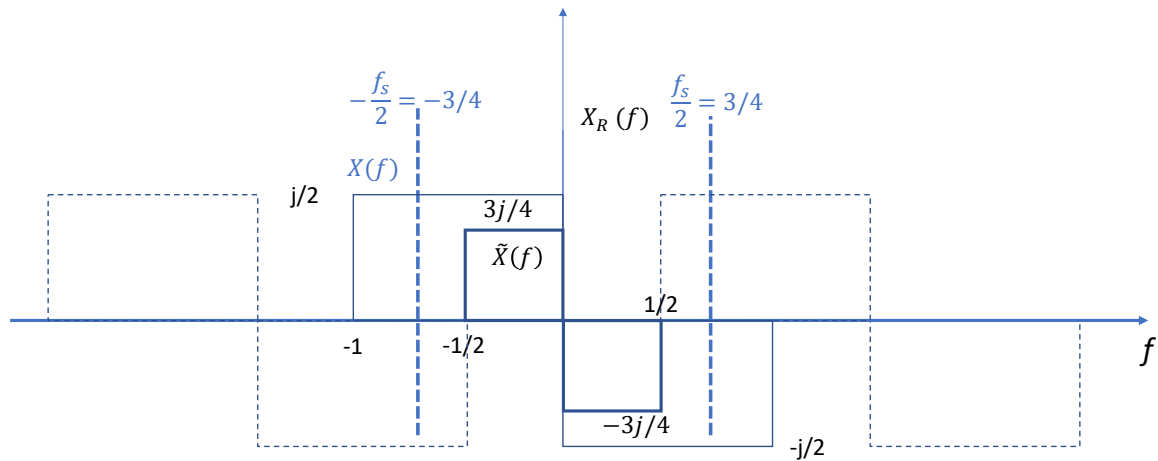
A) La trasformata di $x(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi t}$ è data da:

$$X(f) = \frac{j}{2} \operatorname{rect}\left(f + \frac{1}{2}\right) - \frac{j}{2} \operatorname{rect}\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

Campionando con $f_s = 3/2$ si ottiene nella banda da $-3/4$ a $3/4$

$$\tilde{X}(f) = \frac{3j}{4} \operatorname{rect}\left(2f + \frac{1}{2}\right) - \frac{3j}{4} \operatorname{rect}\left(2f - \frac{1}{2}\right)$$

Il cui grafico è mostrato nella figura.



B) Il segnale ricostruito è:

$$x_R(t) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\pi t}$$

C) NO: il segnale $x_R(t)$ contiene alias in frequenza rispetto all'originale $x(t)$ che non può essere rimosso.

Se si campionano nuovamente sia l'originale $x(t)$ sia il ricostruito $x_R(t)$ con una frequenza di campionamento sufficientemente alta da rispettare il teorema del campionamento, si ottengono due sequenze che rappresentano correttamente $x(t)$ e $x_R(t)$ che sono segnali diversi tra loro.

Soluzione Esercizio 3 del 21/7/2026

A – L'autocorrelazione del processo è:

$$R_x(\tau) = B \operatorname{tri}\left(\frac{\tau}{B}\right) + 16$$

Dunque: varianza $\sigma_x^2 = B$ e valor medio $m_x = \pm 4$

Il coefficiente di correlazione è:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau) - m_x^2}{B} = \operatorname{tri}\left(\frac{\tau}{B}\right)$$

$$R_y(m) = 2R_x(m) - R_x(m+2) - R_x(m-2) = 92\delta_m - 44\delta_{m-2} - 44\delta_{m+2} - 2\delta_{m+4} - 2\delta_{m-4}$$

La varianza di y_n è $\sigma_y^2 = 92$ dunque il coefficiente di correlazione è:

$$\rho_y(m) = \delta_m - \frac{11}{23}\delta_{m-2} - \frac{11}{23}\delta_{m+2} - \frac{1}{46}\delta_{m+4} - \frac{1}{46}\delta_{m-4}$$

B – Il processo $y(t) = x(t) - x(t+B)$ si può scrivere come:

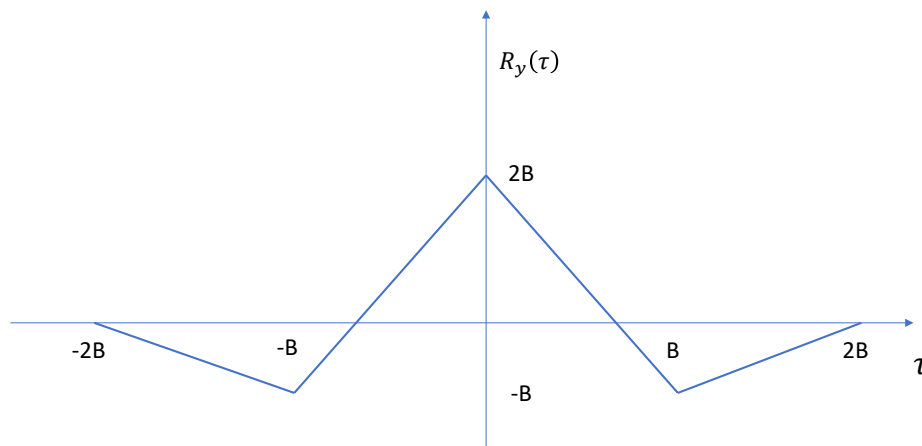
$$y(t) = x(t) * (\delta(t) - \delta(t+B))$$

L'autocorrelazione di $y(t)$ si calcola come:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_x(\tau) * \{2\delta(\tau) - \delta(\tau+B) - \delta(\tau-B)\}$$

$$R_y(\tau) = 2B \operatorname{tri}\left(\frac{\tau}{B}\right) - B \operatorname{tri}\left(\frac{\tau+B}{B}\right) - B \operatorname{tri}\left(\frac{\tau-B}{B}\right)$$

Il grafico di $R_y(\tau)$ è riportato in figura.



C – Il coefficiente di correlazione del processo y_n ottenuto campionando $y(t)$ a passo $T = 2B$ è semplicemente un impulso di ampiezza unitaria δ_n dato che, campionando l'autocorrelazione a passo $T = 2B$ si ottiene un solo campione non nullo nell'origine.