

Segnali per le comunicazioni – Appello del 25/6/2026

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 2 \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \sin(\pi t + \pi/4)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$

C) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = h(t) * \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = 2 \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2 \cos(4\pi t)$ con frequenza di campionamento $f_s = 3$.

A) Si tracci il grafico della trasformata di Fourier del segnale x_n .

B) Si trovi l'espressione del segnale $x_R(t)$ tempo continuo ricostruito dai campioni di x_n .

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario continuo $x(t)$, con valor medio $m_x = -1$ e autocovarianza $C_x(\tau) = \left(\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} \right)^2$.

A – Si trovi l'espressione del coefficiente di correlazione del processo filtrato $y(t) = x(t) * \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.

B – Il processo $y(t)$ viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = 1/4$ ottenendo il processo discreto y_n . Si calcoli la potenza del processo $z_n = y_n * (2\delta_n - 2\delta_{n-1} + 4\delta_{n-2} - 2\delta_{n-3})$

C – Si forma il processo casuale $v(t) = |x(t)|$. E' sempre vero che la varianza di $v(t)$ è minore della varianza di $x(t)$?

Soluzione Esercizio 1 del 25/6/2026

A) La trasformata di Fourier di $h(t) = 2 \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \sin(\pi t + \pi/4)$ ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} H(f) &= je^{-i\frac{\pi}{4}} \text{rect}\left(\frac{f+\frac{1}{2}}{2}\right) - je^{i\frac{\pi}{4}} \text{rect}\left(\frac{f-\frac{1}{2}}{2}\right) = e^{-i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} \text{rect}\left(\frac{f+\frac{1}{2}}{2}\right) + e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} \text{rect}\left(\frac{f-\frac{1}{2}}{2}\right) = \\ &= e^{i(\frac{\pi}{4})} \text{rect}\left(\frac{f+\frac{1}{2}}{2}\right) + e^{-i(\frac{\pi}{4})} \text{rect}\left(\frac{f-\frac{1}{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

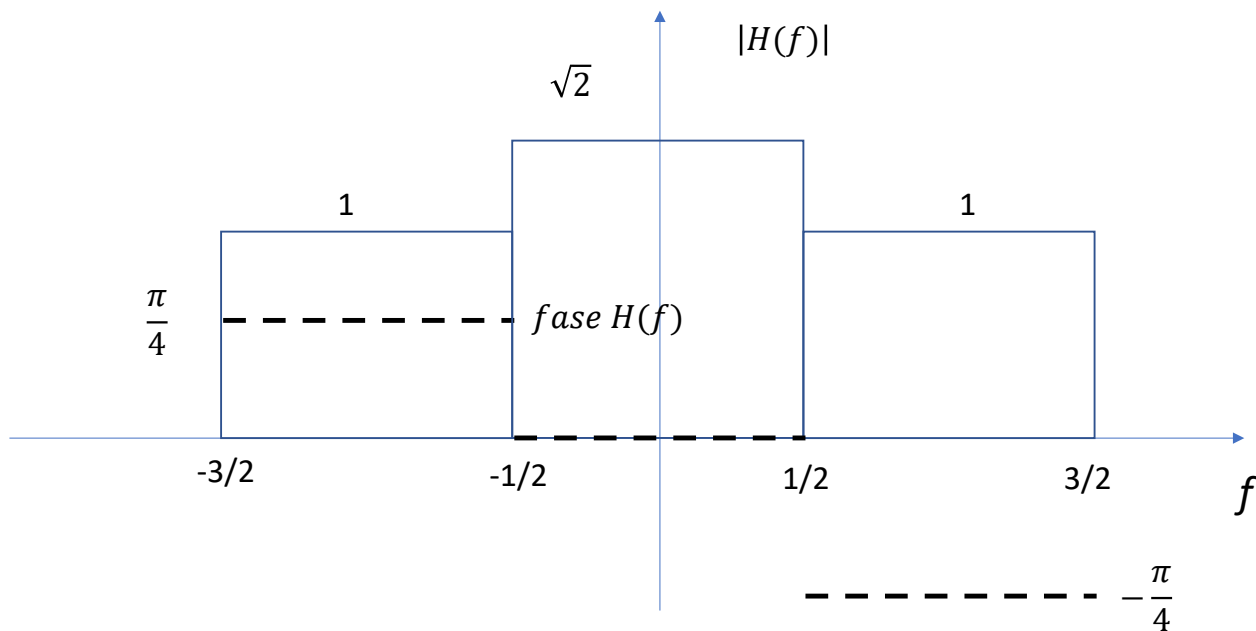
B)

1 - nella banda $-3/2 < f < -1/2$ $X(f) = e^{i(\frac{\pi}{4})}$ e $|X(f)| = 1$ $\angle X(f) = \pi/4$

2 - nella banda $1/2 < f < 3/2$ $X(f) = e^{-i(\frac{\pi}{4})}$ e $|X(f)| = 1$ $\angle X(f) = -\pi/4$

3 - nella banda $-1/2 < f < 1/2$ $X(f) = e^{-i(\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\pi}{4})} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

I grafici di modulo e fase della risposta in frequenza sono i seguenti:



C) Nel dominio delle frequenze

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left[e^{i\pi/4} \text{rect}\left(2\left(f + \frac{3}{4}\right)\right) + e^{-i\pi/4} \text{rect}\left(2\left(f - \frac{3}{4}\right)\right) + \sqrt{2} \text{rect}(f) \right]$$

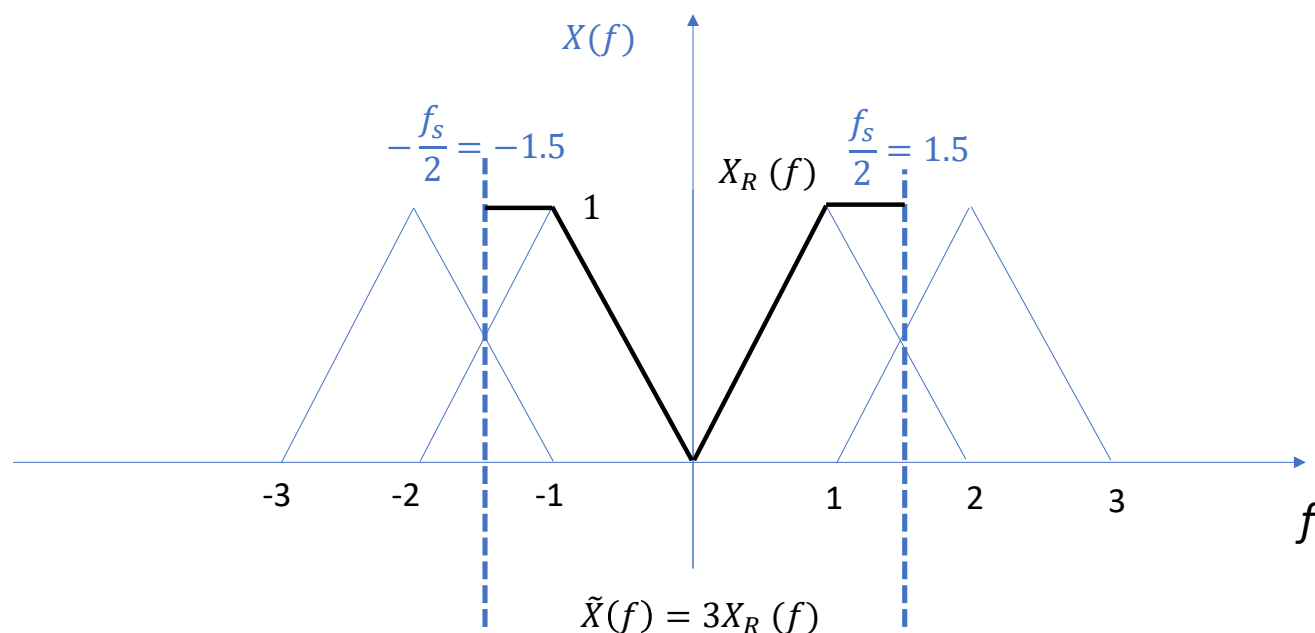
Dunque: $y(t) = 2 \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} \cos\left(\frac{3\pi t}{2} - \pi/4\right) + \sqrt{2} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Soluzione Esercizio 2 del 25/6/2026

A) La trasformata di $x(t) = 2 \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2 \cos(4\pi t)$ è:

$$X(f) = \text{tri}(f - 2) + \text{tri}(f + 2)$$

Con la frequenza di campionamento $f_s = 3$ si introduce alias:



B) L'espressione della trasformata di Fourier del segnale ricostruito è:

$$X_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{3}\right) - \text{tri}(f)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{\sin(3\pi t)}{\pi t} - \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2$$

Soluzione Esercizio 3 del 25/6/2026

a – l'autocorrelazione del processo dato è:

$$R_x(\tau) = \left(\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} \right)^2 + 1$$

La sua densità spettrale di potenza è dunque:

$$S_x(f) = \text{rect}(f) * \text{rect}(f) + \delta(f) = \text{tri}(f) + \delta(f)$$

La densità spettrale di potenza del processo filtrato è:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = [\text{tri}(f) + \delta(f)] \cdot \text{rect}(f)$$

L'autocorrelazione dell'uscita è l'antitrasformata di $S_y(f)$:

$$R_y(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} + \left(\frac{\sin(\pi\tau/2)}{\pi\tau} \right)^2 + 1$$

L'autocovarianza dell'uscita $C_y(\tau) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} + \left(\frac{\sin(\pi\tau/2)}{\pi\tau} \right)^2$.

La varianza dell'uscita $\sigma_y^2 = C_y(0) = \frac{3}{4}$

Dunque il coefficiente di correlazione dell'uscita è:

$$\rho_y(\tau) = \frac{2}{3} \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{\sin(\pi\tau/2)}{\pi\tau} \right)^2$$

b - Il calcolo della potenza di $z_n = y_n * (2\delta_n - 2\delta_{n-1} + 4\delta_{n-2} - 2\delta_{n-3})$ è immediato se si considera che $\rho_y(\tau)$ campionato a passo $T = 4$ è un impulso discreto e quindi tutti i campioni di y_n sono tra loro incorrelati.

Dunque:

$$m_z = m_y \cdot (2 - 2 + 4 - 2) = -2$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 \cdot (4 + 4 + 16 + 4) = \frac{3}{4} \cdot 28 = 21$$

$$P_z = \sigma_z^2 + m_z^2 = 25$$

c – No, non è sempre vero, dipende dalla densità di probabilità del processo $x(t)$.

Se tutti valori di $x(t)$ sono negativi allora la varianza del modulo è uguale a quella di $x(t)$.