

Segnali per le comunicazioni – Appello del 21/7/2026

Gli esercizi devono essere svolti nel tempo massimo di 2h

Esercizio 1

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 2 \frac{\sin(\pi t + \pi)}{\pi(t+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \pi/3\right)$

A) Si calcoli l'espressione analitica della risposta in frequenza $H(f)$

B) Si traccino i grafici di modulo e fase di $H(f)$

C) Si trovi l'espressione della seguente convoluzione: $y(t) = h(t) * \left[\frac{\sin(16\pi t)}{\pi t} + \left(\frac{\sin(\frac{\pi t}{8})}{\pi t} \right)^2 \right]$.

Esercizio 2

Si campioni il segnale tempo continuo $x(t) = \frac{\sin(\pi(t+1))}{\pi(t+1)} + \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$ con frequenza di campionamento $f_s = 1$ ottenendo il segnale x_n .

A) Il teorema del campionamento è stato rispettato?

B) Si tracci il grafico della trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ del segnale x_n .

C) Si dimostri che l'espressione Il segnale ricostruito $x_R(t)$ è uguale a $x(t)$.

Esercizio 3

Sia dato il processo casuale stazionario discreto x_n , densità di probabilità uniforme, valor medio 2 e autocovarianza:

$$R_x(m) = 48\delta_m + 2\delta_{m-2} + 2\delta_{m+2}.$$

A – Si trovi l'espressione del coefficiente di correlazione del processo filtrato $y_n = x_n - x_{n-2}$.

B – Si calcoli la potenza del processo $z_n = y_n * \left(\delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-3} + \frac{1}{2}\delta_{n-6} \right)$

C – Si calcoli la potenza di $|x_n|$

Soluzione Esercizio 1 del 21/7/2026

A) La trasformata di Fourier di $h(t) = 2 \frac{\sin(\pi t + \pi)}{\pi(t+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \pi/3\right)$ ha la seguente espressione:

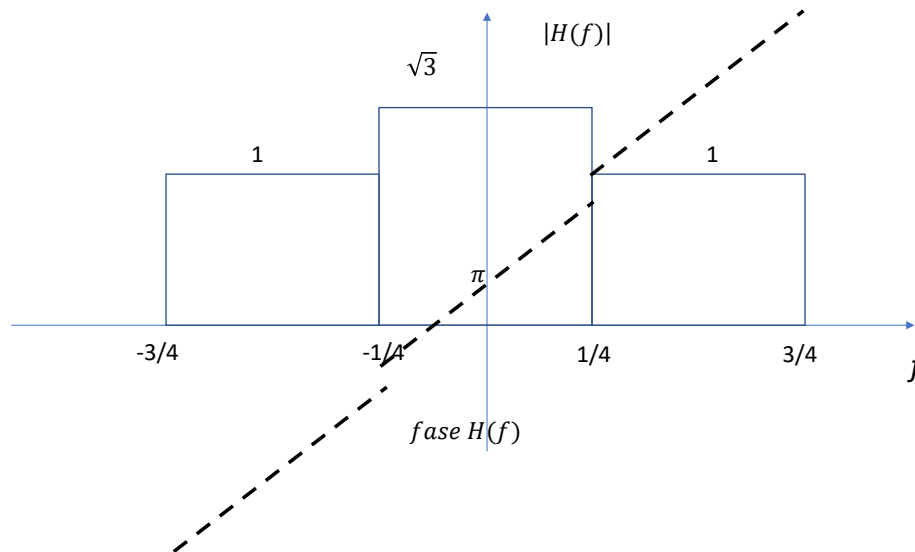
$$\begin{aligned} H(f) &= e^{i2\pi f} \text{rect}(f) * \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} \delta\left(f - \frac{1}{4}\right) + e^{i\frac{\pi}{3}} \delta\left(f + \frac{1}{4}\right) \right) = \\ &= e^{i2\pi f} \left\{ e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} \text{rect}\left(f - \frac{1}{4}\right) + e^{i\left(+\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} \text{rect}\left(f + \frac{1}{4}\right) \right\} = \\ &= e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{rect}\left(f - \frac{1}{4}\right) + e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{rect}\left(f + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

B) 1 - nella banda $-3/4 < f < -1/4$ $X(f) = e^{i2\pi f} e^{i\frac{5\pi}{6}}$ e $|X(f)| = 1$ $\angle X(f) = 2\pi f + 5\pi/6$

2 - nella banda $1/4 < f < 3/4$ $X(f) = e^{i2\pi f} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ e $|X(f)| = 1$ $\angle X(f) = 2\pi f - 5\pi/6$

3 - nella banda $-1/4 < f < 1/4$ $X(f) = e^{i2\pi f} 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} e^{i2\pi f}$ $\angle X(f) = 2\pi f + \pi$

I grafici di modulo e fase della risposta in frequenza sono i seguenti:



C) Nel dominio delle frequenze: la trasformata di $\frac{\sin(16\pi t)}{\pi t}$ è un rettangolo di ampiezza unitaria che include tutta $H(f)$ e quindi non ne cambia la forma. La trasformata di $\left(\frac{\sin(\frac{\pi t}{8})}{\pi t}\right)^2$ è un triangolo con banda che sta tutta all'interno della banda $\pm \frac{1}{4}$ e quindi viene solo moltiplicata per $-\sqrt{3}e^{i2\pi f}$.

Banalmente: $y(t) = h(t) - \sqrt{3} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi(t+1)}{8}\right)}{\pi(t+1)} \right)^2$

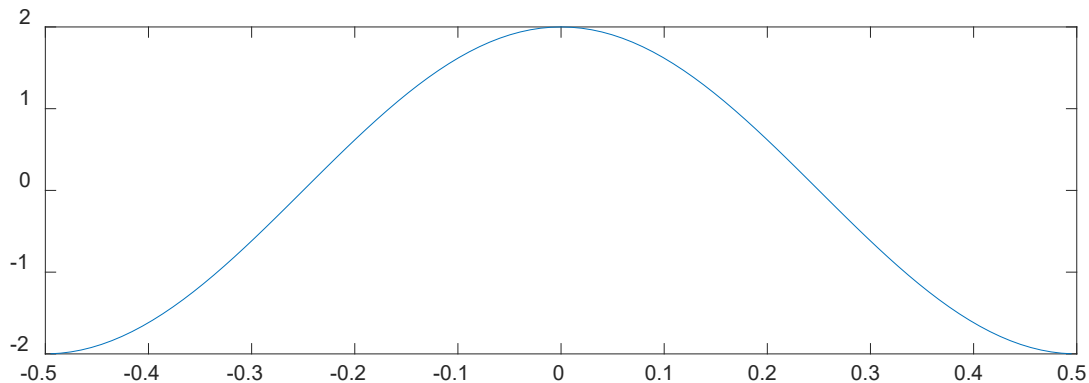
Soluzione Esercizio 2 del 21/7/2026

A) La massima frequenza del segnale è $\frac{1}{2}$ quindi il teorema del campionamento è rispettato al limite.

B) Campionando il segnale $x(t) = \frac{\sin(\pi(t+1))}{\pi(t+1)} + \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)}$ a passo 1, si vanno a prendere tutti gli zeri dei seni cardinali tranne in $t = \pm 1$.

Dunque $x_n = \delta_{n+1} + \delta_{n-1}$ e la sua trasformata di Fourier è:

$$\tilde{X}(f) = e^{i2\pi f} + e^{-i2\pi f} = 2\cos(2\pi f)$$



C) Dato che il teorema del campionamento è rispettato al limite ci si aspetta che il segnale ricostruito sia uguale all'originale. Si può verificare valutando la trasformata di Fourier del segnale ricostruito che è:

$$X_R(f) = 2\cos(2\pi f) \cdot \text{rect}(f)$$

Il segnale ricostruito è quindi:

$$x_R(t) = \frac{\sin(\pi(t+1))}{\pi(t+1)} + \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi(t-1)} = x(t)$$

Soluzione Esercizio 3 del 21/7/2026

A – Il valor medio del processo $y_n = x_n - x_{n-2}$ è nullo.

La sua autocorrelazione:

$$R_y(m) = 2R_x(m) - R_x(m+2) - R_x(m-2) = 92\delta_m - 44\delta_{m-2} - 44\delta_{m+2} - 2\delta_{m+4} - 2\delta_{m-4}$$

La varianza di y_n è $\sigma_v^2 = 92$ dunque il coefficiente di correlazione è:

$$\rho_y(m) = \delta_m - \frac{11}{23}\delta_{m-2} - \frac{11}{23}\delta_{m+2} - \frac{1}{46}\delta_{m+4} - \frac{1}{46}\delta_{m-4}$$

B – La potenza di $z_n = y_n * \left(\delta_n - \frac{1}{2}\delta_{n-3} + \frac{1}{2}\delta_{n-6}\right)$ coincide con la sua varianza.

Peraltro, $z_n = y_n - \frac{1}{2}y_{n-3} + \frac{1}{2}y_{n-6}$. Dunque è somma di campioni incorrelati e, in questi casi, la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze:

$$E[z_n^2] = \sigma_z^2 = \sigma_v^2 + \frac{1}{4}\sigma_v^2 + \frac{1}{4}\sigma_v^2 = 138$$

La strada lunga per chi non ha visto l'incorrelazione è:

$$\begin{aligned} E[z_n^2] &= E\left[y_n^2 + \frac{1}{4}y_{n-3}^2 + \frac{1}{4}y_{n-6}^2 - y_n y_{n-3} + y_n y_{n-6} - 2y_{n-3} y_{n-6}\right] \\ &= \frac{3}{2}R_y(0) - R_y(3) + R_y(6) - R_y(-3) = \frac{3}{2}R_y(0) = 138 \end{aligned}$$

C – La potenza di $|x_n|$ è uguale alla potenza di x_n che vale 52.

L'informazione sulla densità di probabilità sarebbe servita per il calcolo della varianza di $|x_n|$ (che infatti avrebbe avuto più denso come domanda).

In questo caso dato che x_n ha varianza $\sigma_x^2 = 48$, avrà una densità di probabilità uniforme pari a $1/24$ tra:

$$\frac{\sqrt{12\sigma_x^2}}{2} - 2 = -12 + 2 \quad \text{e} \quad 12 + 2$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\Delta^2}{12} = 12$$

$|x_n|$ avrà una densità di probabilità uniforme a tratti: Δ_1 da 0 a 10 ($1/12$) e poi Δ_2 da 10 a 14 ($1/24$). La potenza è uguale ma il valor medio è differente e si può calcolare attraverso la definizione notando che i valori del processo $|x_n|$ assumono valori uniformi tra 0 e 10 con probabilità $P_1 = 10/12$ e uniformi tra 10 e 14 con probabilità $P_2 = 4/24$

Sfruttando le formule di valor medio delle distribuzioni uniformi si ottiene:

$$E[|x_n|] = \left(\frac{\Delta_1^2}{12} + m_1^2 \right) P_1 + \left(\frac{\Delta_2^2}{12} + m_2^2 \right) P_2$$

$$E[[x_n]^2] = (m_1)10/12 + (m_2)4/24 = (5)10/12 + (12)4/24 = 37/6$$

Così la varianza del modulo vale: $E[[x_n]^2] - E[|x_n|]^2 = 52 - 38.03 \approx 14$