Segnali per le comunicazioni –Appello del 17/2/2022

Esercizio 1

da svolgere in 35 minuti

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso: $h(t) = (1 + \sin(\pi t))$

A) Si trovi l'espressione della risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato.

B) Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema dato con ingresso $x(t) = rect(t - \tau)$.

C) Si calcoli la potenza dell'uscita.

Soluzione Esercizio 1 del 17/2/2022

Sia dato il sistema LTI con risposta all'impulso: $h(t) = (1 + \sin(\pi t))$.

A) Si trovi l'espressione della risposta in frequenza $H(f)$ del sistema dato:

$$H(f) = \delta(f) + \frac{j}{2}\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) - \frac{j}{2}\delta\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

B) Si calcoli l'uscita del sistema dato con ingresso $x(t) = rect(t - \tau)$.

La trasformata dell'ingresso è: $X(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f} e^{-j2\pi f}$

La trasformata dell'uscita è:

$$Y(f) = H(f)X(f) = \delta(f) + \frac{j}{\pi} e^{j\pi\tau}\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) - \frac{j}{\pi} e^{-j\pi\tau}\delta\left(f + \frac{1}{2}\right)$$

L'uscita è:

$$y(t) = 1 + \frac{j}{2} e^{j\pi\tau} e^{-j\pi t} - \frac{j}{2} e^{-j\pi\tau} e^{j\pi t} = 1 + \frac{2}{\pi}\sin \pi(t - \tau)$$

C) Si calcoli la potenza dell'uscita.

La potenza dell'uscita è banalmente la somma della potenza della costante unitaria e di quella della sinusoide di ampiezza $A = \frac{2}{\pi}$ così come è in generale nel caso di somma di cosinusoidi di frequenza diversa (e la costante è una cosinusoide a frequenza nulla).

Infatti la potenza è data dall'integrale del quadrato del segnale divisa per il periodo. Tutti prodotti incrociati che derivano dall'elevare al quadrato il segnale, danno contributo nullo all'integrale eseguito su un periodo del segnale.

In questo particolare caso l'uscita è un segnale periodico di periodo $T_o = 2$. Per definizione la potenza è:

$$P_y = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1 + \frac{2}{\pi}\sin \pi(t-\tau)\right)^2 dt$$

$$P_y = \frac{1}{2}\int_0^2 1 + \frac{4}{\pi^2}\sin^2 \pi(t-\tau) + \frac{4}{\pi}\sin \pi(t-\tau)\, dt$$

L'integrale del prodotto incrociato è nullo in quanto eseguito su un periodo esatto della sinusoide.

Dunque la potenza dell'uscita è $P_y = 1 + \frac{A^2}{2} = 1 + \frac{2}{\pi^2}$

Segnali per le comunicazioni –Appello del 17/2/2022

Esercizio 2

da svolgere in 35 minuti

Sia dato il processo casuale continuo $x(t)$ con valor medio 4, potenza 32 e coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau) = \left[\frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau}\right]^2$

- **A)** Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo discreto $x(t)$.
- **B)** Il processo dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = B$. Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo discreto x_n.
- **C)** Si calcoli la potenza del processo $y_n = 2 + x_n + x_{n-1}$

Soluzione Esercizio 2 del 17/2/2022

Sia dato il processo casuale continuo $x(t)$ con valor medio 4, potenza 32 e coefficiente di correlazione $\rho_x(\tau) = \left[\frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau}\right]^2$

A) Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo discreto $x(t)$.

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) + m_x^2 = 16\left[\frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau}\right]^2 + 16$$

dato che $\sigma_x^2 = P_x - m_x^2$

La densità spettrale di potenza del processo discreto $x(t)$ è la trasformata di Fourier della sua autocorrelazione:

$$S_x(f) = \frac{16}{B^2} rect\left(\frac{f}{B}\right) * rect\left(\frac{f}{B}\right) + 16\delta(f)$$

B) Il processo dato viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = B$. Si scriva l'espressione della densità spettrale di potenza del processo discreto x_n.

$$\tilde{S}_x(f) = 16 rect\left(\frac{f}{B}\right) + 16B\delta(f) \quad \text{periodica di periodo } B$$

$$R_x[m] = 16\delta_m + 16$$

C) Si calcoli la potenza del processo $y_n = x_n + x_{n-1} + 2$

E' sufficiente notare che i campioni $x_n,\ x_{n+1}$ sono tra loro incorrelati e quindi la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze:

$$\sigma_y^2 = 2\sigma_x^2 = 32$$

Inoltre anche il valor medio di y_n è uguale alla somma dei valori medi degli addendi $m_y = 2m_x + 2 = 10$.

Quindi $P_y = \sigma_y^2 + m_y^2 = 32 + 100 = 132$