



POLITECNICO DI MILANO

Segnali per le Telecomunicazioni

2014

Formulario

816820 Federico BADINI
817615 Stefano BODINI

Prof.
Claudio PRATI

June 10, 2014

Segnali a energia e potenza finita

Tempo continuo

Energia

$$(1.1) \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$$

Potenza(segnale non period.)

$$(1.2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Potenza(segnale period.)

$$(1.3) \quad P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

Tempo discreto

Energia

$$(1.4) \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

Potenza(segnale non period.)

$$(1.5) \quad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$$

Potenza(segnale period.)

$$(1.6) \quad P = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x_n|^2$$

Proprieta' dell'impulso discreto

Impulso centrato nell'origine

$$(1.15) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n d_n = x_0$$

$$(1.14) \quad x_n d_n = x_0 d_n$$

Impulso traslato

$$(1.16) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n d_{n-n_0} = x_{n_0}$$

$$(1.17) \quad x_n d_{n-n_0} = x_{n_0} d_{n-n_0}$$

Scomposizione sequenze

Una qualsiasi sequenza puo' essere scritta come somma di impulsi discreti traslati e pesati

$$(1.18) \quad x_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m d_{n-m}$$

Un generico segnale puo' essere rappresentato come somma integrale di impulsi ritardati e pesati

$$(1.28) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

Prodotto segnale-impulso

Impulso centrato nell'origine

$$(1.24) \quad x(t) \cdot \delta(t) = x(t) \cdot \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \\ = \lim_{T \rightarrow 0} x(0) \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = x(0) \cdot \delta(t)$$

Impulso traslato

$$(1.27) \quad x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Proprieta' di scalatura

Per impulsi

$$(1.40) \quad \delta(at) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{at}{T}\right) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Sistemi lineari tempo invarianti

Uscita per sistemi discreti

Come conseguenza dell'equazione (1.18)

$$(2.3) \quad y_n = \Gamma[x_n] = \Gamma \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k} \right] = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \Gamma[\delta_{n-k}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}$$

In forma compatta

$$(2.4) \quad y_n = x_n * h_n$$

Uscita per sistemi continui

Come conseguenza dell'equazione (1.28)

$$(2.6) \quad y(t) = \Gamma[x(t)] = \\ = \Gamma \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \right] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \Gamma[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

In forma compatta

$$(2.7) \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

Proprietà dell'operatore convoluzione

Sia per segnali continui che per segnali discreti

Commutativa

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

Distributiva

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * z(t) + y(t) * z(t)$$

Associativa

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$$

Convoluzione con impulsi

Tempo continuo (da par 2.3 pag 38)

$$y(t) = x(t) * A\delta(t - t_0) = Ax(t - t_0)$$

Tempo discreto (da par 2.3 pag 38)

$$y_n = x_n * A\delta_{n-n_0} = Ax_{n-n_0}$$

Trasformata di Fourier

Tempo continuo

Trasformata

$$(3.3) \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Antitrasformata

$$(3.5) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Tempo discreto

Trasformata

$$(3.22) \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi fnT}$$

Antitrasformata

$$(3.23) \quad x_n = T \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} X(f) e^{j2\pi fnT} df$$

Trasformata normalizzata

$$(3.24) \quad X(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi \phi n}$$

Antitrasformata normalizzata

$$(3.25) \quad x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(\phi) e^{j2\pi \phi n} d\phi$$

Proprietà delle trasformate (tempo continuo)

<u>Par.</u>	<u>Proprietà</u>	<u>Tempo</u>	<u>Frequenza</u>
(3.3.1)	Linearità	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
(3.3.2)	Complesso coniugato	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
	Simmetria	Se $x(t)$ è reale	$X(-f) = X^*(f)$ $Re\{X(f)\} = Re\{X(-f)\}$ $Im\{X(f)\} = -Im\{X(-f)\}$ $ X(f) = X(-f) $ $\angle X(f) = \angle X(-f)$
		se $x(t)$ è reale e pari	$X(f)$ è reale e pari
		se $x(t)$ è reale e dispari	$X(f)$ è immaginaria e dispari
(3.3.3)	Scalatura	$x(at)$ con a reale	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
(3.3.4)	Valori nell'origine	$x(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$ $X(0)$
(3.3.5)	Dualità	$x(t)$ $X(f)$	$X(f)$ $x(-f)$
(3.3.6)	Traslazione	$x(t - t_0)$ $x(t)e^{+j2\pi f_0 t}$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$ $x(f - f_0)$
(3.3.7)	Convoluzione	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
(3.3.8)	Modulazione	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
(3.3.9)	Derivazione	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
(3.3.10)	Integrazione	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$
(3.3.11)	Relazione di Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$
	Funzione di autocorrelazione	$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t + \tau) dt = R_x(\tau)$	$ X(f) ^2 df$

Trasformate notevoli (tempo continuo)

<u>Segnale</u>	<u>Tempo</u>	<u>Frequenza</u>
Impulso	$x(t) = \delta(t)$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = 1$
Rettangolo	$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$X(f) = \frac{\sin \pi T f}{\pi f} = T \cdot \text{sinc}(f)$
Seno cardinale	$x(t) = \frac{\sin \pi B t}{\pi t}$	$X(f) = \text{rect}\left(\frac{t}{B}\right)$
Seno	$x(t) = \sin 2\pi f_0 t$	$X(f) = \frac{j}{2} \delta(f + f_0) - \frac{j}{2} \delta(f - f_0)$
Coseno	$x(t) = \cos 2\pi f_0 t$	$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$
Esponenziale ($t > 0$)	$x(t) = e^{-at} u(t)$	$X(f) = (a + j2\pi f)^{-1}$
Gaussiano	$x(t) = e^{-\pi t^2 / \sigma^2}$	$X(f) = \sigma e^{-\pi \sigma^2 f^2}$

Proprietà delle trasformate (tempo discreto)

<u>Par.</u>	<u>Proprietà'</u>	<u>Tempo</u>	<u>Frequenza</u>	<u>Frequenza normalizzata</u>
(3.5)	Simmetria	Se x_n è reale	$X(-f) = X^*(f)$ $Re\{X(f)\} = Re\{X(-f)\}$ $Im\{X(f)\} = -Im\{X(-f)\}$ $ X(f) = X(-f) $ $\angle X(f) = -\angle X(-f)$	$X(-\phi) = X^*(\phi)$ $Re\{X(\phi)\} = Re\{X(-\phi)\}$ $Im\{X(\phi)\} = -Im\{X(-\phi)\}$ $ X(\phi) = X(-\phi) $ $\angle X(\phi) = -\angle X(-\phi)$
	Complesso coniugato	x_n^*	$X^*(-\phi)$	$X^*(-\phi)$
	Linearità	$ax_n + by_n$	$aX(f) + bY(f)$	$aX(\phi) + bY(\phi)$
(3.5.1)	Valori nell'origine	x_0 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$	$T \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} X(f) df$ $X(0)$	$\int_{-1/2}^{1/2} X(\phi) d\phi$ $X(0)$
(3.5.2)	Traslazione	x_{n-n_0} $x_n e^{j2\pi f_0 T n} = x_n e^{j2\pi \phi_0 T n}$	$X(f) e^{-j2\pi f T n_0}$ $X(f - f_0)$	$X(\phi) e^{-j2\pi \phi T n_0}$ $X(\phi - \phi_0)$
(3.5.3)	Convoluzione	$x_n * y_n$	$X(f)Y(f)$	$X(\phi)Y(\phi)$
(3.5.4)	Modulazione	$x_n y_n$	$T \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} X(\theta)Y(f - \theta) d(\theta)$	$T \int_{-1/2}^{1/2} X(\theta)Y(\phi - \theta) d(\theta)$
(3.5.5)	Relazione di Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n ^2$	$T \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} X(f) ^2 df$	$T \int_{-1/2}^{1/2} X(\phi) ^2 d\phi$
	Autocorrelazione	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* x_{n+k} = R_x[k]$	$ X(f) ^2$	$ X(\phi) ^2$

Trasformate notevoli (tempo discreto)

<u>Segnale</u>	<u>Tempo</u>	<u>Frequenza</u>
Impulso	$x_n = d_n$	$X(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{-j2\pi \phi n} = 1$
Esponenziale ($t > 0$)	$x(t) = a^n u_n$	$X(\phi) = \sum_0^{\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi \phi n} = \sum_0^{\infty} \left(a \cdot e^{-j2\pi \phi} \right)^n$

Campionamento nei tempi

Campionamento ideale

$$(4.1) \quad x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \\ = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Trasformata del campionamento ideale

$$(4.5) \quad X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \\ = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Campionamento di segnali reali

$$(4.7) \quad f_{max} < \frac{1}{2T}$$

Se la condizione è rispettata la trasformata di $x(t)$ si ottiene da quella del segnale campionato $x_c(t)$ eliminando tutte le repliche spettrali tranne quella in banda base $(-f_s/2 - f_s/2)$

Tr. Fourier normalizzata e segnale campionato

$$(4.16) \quad X(\phi) = X_c(\phi/T) = X_c(\phi \cdot f_s)$$

Nel passaggio dalla trasformata alla trasformata normalizzata, se sono presenti impulsi essi risultano scalati per l'inverso della frequenza di campionamento (se il passaggio fosse l'opposto moltiplicherei)

Calcolo dell'energia e della potenza

Segnali a energia finita

Legame fra energia segnale-sequenza associata

$$(4.20) \quad E_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 = T \int_{1/T} \left| \frac{X(f)}{T} \right|^2 df = \frac{E_t}{T}$$

Segnali a potenza finita

Legame fra potenza segnale-sequenza di un periodo

$$(par. 4.5.2) \quad P_t = \frac{E_t}{T_0} = \frac{T E_n}{T_0} = \frac{E_n}{N} = \\ = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = P_n$$

Campionamento in frequenza

Data trasf $S(f)$ e passo $F = 1/t_s$

Trasformata campionata

$$(par. 4.6) \quad S_c(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kF)\delta(f - kF) = \\ = S(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(f - \frac{k}{t_s}\right)$$

Antitrasformata

$$(par. 4.6) \quad s_c(t) = t_S \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kt_s)$$

Criterio di campionamento

$$(4.21) \quad t_m < \frac{1}{F} = t_S$$

con t_m durata del segnale

Trasformata discreta di Fourier

Trasformata discreta di Fourier

$$(5.1) \quad X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad \text{calcolata per } 0 \leq k \leq N-1$$

Trasformata discreta di Fourier inversa

$$(5.2) \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad \text{calcolata per } 0 \leq n \leq N-1$$

Proprietà della trasformata discreta di Fourier

<u>Par.</u>	<u>Proprietà'</u>	<u>Sequenza</u>	<u>DFT</u>
(5.3.1)	Linearità	$ax_n + by_n$	$aX_n + bY_n$
(5.3.2)	Simmetria	x_n^* x_{-n}^* circolare	X_{-k}^* circolare X_k^*
(5.3.3)	Valori iniziali	x_0 $\sum_{n=0}^{N-1} x_n$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k$ X_0
(5.3.4)	Traslazione circolare	\tilde{x}_{n-m} $x_n e^{j2\pi np/N}$	$X_k e^{-j2\pi mk/N}$ X_{n-p}
(5.3.5)	Convoluzione circolare	$\sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{n-m}$ circolare	$X_k Y_k$
(5.3.6)	Modulazione	$x_n y_n$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_{k-m}$ circolare
(5.3.7)	Relazione di Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x_n ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k ^2$

Autocorrelazione circolare di una sequenza

$$(\text{par. 5.3.8}) \quad R_x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 \cdot e^{j2\pi mk/N}$$

Cross-correlazione circolare di sequenze

$$(\text{par. 5.3.9}) \quad R_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^* \cdot e^{j2\pi mk/N}$$

<u>Segnale</u>	<u>Sequenza</u>	<u>DFT</u>
Impulso	$x_n = \delta_n$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_n \cdot e^{-j2\pi nk/N} = 1$
Impulso ritardato	$x_n = \delta_{n-p}$	$X_k = e^{-j2\pi pk/N}$
Costante di N campioni	$x_n = 1$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j2\pi nk/N} = N \delta_k$
Esponenziale complesso	$x_n = e^{j2\pi \phi n}$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n(k-N\phi)/N}$

Parametri di processi casuali

Valor medio	(par. 6.2.1) $m_x(t) = E[x_t] = \int_{-\infty}^{\infty} ap_{x_t}(a)da$
Valor medio temporale	$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) dt$
Valore quadratico medio	(par. 6.2.1) $E[x_t ^2] = \int_{-\infty}^{\infty} a ^2 p_{x_t}(a)da$
Valore atteso di una funzione	(par. 6.2.1) $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(a)x(a) da$
Varianza	(par. 6.2.1) $\sigma_x^2(t) = E[x_t - m_x(t) ^2] =$ $= E[x_t ^2] - m_x(t) ^2$
Funzione di autocorrelazione	(par. 6.3.1) $R_x(t_1, t_2) = E[x^*(t_1) \cdot x(t_2)] =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^* b p_{x(t_1) x(t_2)}(a, b) da db$
Autocorrelazione per $x(t_1)$ e $x(t_2)$ indipendenti	(par. 6.3.1) $R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)] \cdot E[x^*(t_2)]$
Autocorrelazione temporale	$\mathbb{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau)x^*(t) dt$
Funzione di autocovarianza	(par. 6.3.2) $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_x^*(t_1)m_x(t_2)$
Autocovarianza per $x(t_1)$ e $x(t_2)$ indipendenti	(par. 6.3.2) $C_x(t_1, t_2) = 0$
Coefficiente di correlazione	(6.3) $\rho_x(t_1, t_2) = \frac{C_x(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_1) \cdot \sigma_x^2(t_2)}}$

Parametri di processi casuali stazionari

Parametri ora indipendenti dal tempo	σ_x^2, m_x
Funzione di autocorrelazione	(6.7) $R_x(t, t + \tau) = R_x(\tau) = E[x^*(t) \cdot x(t + \tau)]$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^* b p_{x(t) x(t+\tau)}(a, b) da db$
Simmetria compl. coniug. dell'autocorrelazione	(par. 6.4.1) $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$
Picco di autocorrelazione	(par. 6.4.1) $R_x(0) \geq R_x(\tau) $
Funzione di cross-correlazione	(par. 6.4.4) $R_{xy}(\tau) = E[y^*(t) \cdot x(t + \tau)]$
Funzione covarianza	(par. 6.4.4) $C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x m_y^*$
Funzione di autocovarianza	(par. 6.4.1) $C_x(\tau) = R_x(\tau) - m_x ^2$
Autocovarianza in 0	(par. 6.4.1) $C_x(\tau) \Big _{\tau=0} = \sigma_x^2$
Coefficiente di correlazione	(par. 6.4.1) $\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}$
Relazioni tra variabili temporali e di insieme	(par. 6.5.1) $E[\mu_x] = m_x$ (par. 6.5.1) $E[\mathbb{R}_x(\tau)] = R_x(\tau)$

Predizione

Predizione lineare (ottima per processi gaussiani)	(6.10) $\hat{x}(t_2) = \rho(\tau) \cdot x(t_1), \quad \tau = t_2 - t_1$
--	---

Processi casuali gaussiani

Densita' di probabilita' gaussiana	(par. 6.4.3) $p_{x(t)}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$
Densita' di probabilita' congiunta	(par. 6.4.3) $p_{x(t+\tau)x(t)}(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \cdot e^{-\frac{a^2+b^2-2\rho_x(\tau)ab}{2\sigma_x^2(1-\rho_x^2(\tau))}}$
In caso di incorrelazione	(par. 6.4.3) $p_{x(t+\tau),x(t)}(a, b) = p_{x(t+\tau)}(a) p_{x(t)}(b)$
Densita' di probabilita' condizionata	(par. 6.4.3) $p_{x(t+\tau) x(t)}(b) = \frac{p_{x(t+\tau)x(t)}(a, b)}{p_{x(t)}(a)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho_x^2)}} \cdot e^{-\frac{(b-a\rho)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho_x^2)}}$

Processi casuali ergodici

Processi ergodici per la media	(par. 6.5.1) $m_x = \mu_x$
Processi ergodici per l'autocorrelazione	(par. 6.5.1) $R_x(\tau) = \mathbb{R}_x(\tau)$

Densita' spettrale di potenza

Tempo continuo

Densita' spettrale di potenza	(6.17) $S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$
Autocorrelazione da densita' spettrale	(6.18) $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$
Potenza di un processo casuale	(par 6.6.1) $P = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$

Tempo discreto

Densita' spettrale di potenza	(par 6.6.2) $S_x(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] e^{-j2\pi\phi m}$
Densita' spettrale tempo discreto	(par 6.6.2) $S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(mT) e^{-j2\pi f mT}$
Autocorrelazione da densita' spettrale	(par. 6.6.2) $R_x[m] = \int_0^1 S_x(\phi) e^{j2\pi\phi m} d\phi$
Autocorrelazione da densita' spettrale TD	(par 6.6.2) $R_x(mT) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} S_x(f) e^{j2\pi f mT} df$
Potenza media di un processo casuale	(par. 6.6.2) $E[x_n^2] = R_x[0] = \int_0^1 S_x(\phi) d\phi$

Processi casuali bianchi

Tempo continuo

Autocovarianza impulsiva	(par. 6.6.1) $C_x(\tau) = k\delta(\tau)$
Autocorrelazione	(par. 6.6.1) $R_x(\tau) = k\delta(\tau) + m_x ^2$
Densita' spettrale	(par. 6.6.1) $S_x(f) = k + m_x ^2 \delta(f)$
Potenza processo bianco ideale	∞

Tempo discreto

Autocovarianza impulsiva	(par. 6.6.2) $C_x[m] = k\delta_m$
Autocorrelazione	(par. 6.6.2) $R_x[m] = k\delta_m + m_x ^2$
Densita' spettrale	(par. 6.6.2) $S_x(\phi) = k + m_x ^2 \delta(\phi)$
Potenza processo bianco ideale	(par. 6.6.2) $P = R_x[0] = \int_0^1 S_x(\phi) d\phi = k + m_x ^2$

Processi casuali bianchi in banda bilatera W

Tempo continuo

Autocorrelazione	(par. 6.6.1) $R_x(\tau) = k \frac{\sin \pi W \tau}{\pi \tau} + m_x ^2$
Potenza	(par. 6.6.1) $P = R_x(0) = kW + m_x ^2$
Varianza	(par. 6.6.1) $\sigma_x^2 = C_x(0) = kW$
White gaussian noise	(par. 6.6.1) $p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}}$
Densita' spettrale White gaussian noise	(par. 6.6.1) $S_x(f) = \frac{\sigma_x^2}{W}$
Autocovarianza White gaussian noise	(par. 6.6.1) $C_x(\tau) = R_x(\tau) = \frac{\sigma_x^2}{W} \frac{\sin \pi W \tau}{\pi \tau}$

Cross-spettro

Cross-spettro	(par. 6.6.4) $S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$
Cross-correlazione da cross-spettro	(par. 6.6.4) $R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f \tau} df$
Relazione per processi reali	(par. 6.6.4) $S_{xy}(f) = S_{yx}(-f) = S_{yx}^*(f)$

Processi casuali attraverso sistemi LTI

- (par 6.7.3) *Se la densita' di probabilita' del processo in ingresso ad un sistema LTI e' gaussiana, anche l'uscita sara' gaussiana, qualsiasi sia la risposta all'impulso del sistema.*
- (par 6.7.3) *Se la durata della risposta all'impulso del sistema LTI e' molto maggiore del tempo di decorrelazione del processo in ingresso, la densita' di probabilita' dell'uscita tendera' a diventare gaussiana.*

Tempo continuo

Valor medio dell'uscita	(par. 6.7.2) $m_y = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = m_x H(0)$
Autocorrelazione dell'uscita	(par. 6.7.2) $R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$
Densita' spettrale	(par. 6.7.2) $S_y(f) = S_x(f) \cdot H(f) ^2$
Cross-correlazione uscita ingresso	(par. 6.7.2) $R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$ (par. 6.7.2) $R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(\tau)$
Cross-spettro	(par. 6.7.2) $S_{yx}(f) = S_x(f)H(f)$ (par. 6.7.2) $S_{xy}(f) = S_x(f)H(-f)$

Tempo discreto

Valor medio dell'uscita

$$\text{(par. 6.7.1)} \quad E[y_n] = m_x H(0)$$

Autocorrelazione dell'uscita

$$(6.23) \quad R_y[m] = R_x[m] * h_m * h_{-m}^*$$

Densita' spettrale

$$\text{(par. 6.7.1)} \quad S_y(\phi) = S_x(\phi) \cdot |H(\phi)|^2$$

Cross-correlazione uscita ingresso

$$(6.24) \quad R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m$$

Cross-correlazione con ingr. rumore bianco
a valor medio nullo

$$\text{(par. 6.7.1)} \quad R_{yx}[m] = A\delta_m * h_m = Ah_m$$

Codifica di segnali numerici

Errore di quantizzazione delle ampiezze

$$\text{(par. 7.1)} \quad e_q[n] = x[n] - x_q[n]$$

Escursione massima del segnale da quantizzare

$$2V$$

Numero dei livelli di quantizzazione

$$M$$

Intervallo di quantizzazione

$$\text{(par. 7.1)} \quad \Delta = \frac{2V}{M}$$

Media dell'errore di quantizzazione

$$\text{(par. 7.1)} \quad E[e_q[n]] = 0$$

Varianza dell'errore di quantizzazione

$$\text{(par. 7.1)} \quad \sigma_{e_q}^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3M^2} = P_{e_q}$$

Bit necessari per codifica binaria

$$\text{(par. 7.1)} \quad K = \log_2 M$$

Potenza dell'errore di quantizzazione

$$(7.1) \quad (P_{e_q})_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{V^2}{3} \right) - 6K$$

Rapporto segnale-rumore

$$\text{(par. 7.1)} \quad (SNR_q)_{dB} = \left(\frac{P_x}{P_{e_q}} \right)_{dB} = 6K$$

Bit rate medio

$$\text{(par. 7.2)} \quad E[\text{bit-rate}] = f_s \sum_{i=1}^{2^K} P_i K_i$$

Entropia della sorgente

Sorgente senza memoria

$$(7.3) \quad H = \sum_{i=1}^M -P_i \log_2(P_i) \quad \text{bit/simbolo}$$

Sorgente senza memoria con simboli equiprobabili

$$(7.4) \quad H = \log_2 M \quad \text{bit/simbolo}$$

Appendice di analisi

Trigonometria

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A-B) + \sin(A+B) \}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2A$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(B-A)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) + \cos(A+B) \}$$

Derivate

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v$$

$$\text{Chain rule: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} u < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} u < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (0 < \cos^{-1} u < \pi)$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx}, \quad a \neq 0, 1$$

Integrali

$$\text{Integrazione per parti: } \int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int \cos u du = \sin u$$

$$\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u)$$

$$\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right|$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \sin ax$$

$$\int \tan^2 ax dx = \frac{\tan ax}{a} - x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int e^u du = e^u$$

$$\int \sin u du = -\cos u$$

$$\int \tan u du = -\ln |\cos u|$$

$$\int \tan^2 u du = \tan u - u$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right) \cos ax$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a}\right)$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2})$$

Serie

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{k=0}^n ka^k = \frac{a\{1 - (n+1)a^n + na^{n+1}\}}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

Appendice di probabilita'

Frequenza di un evento a	$F_{rel} = \frac{N_a}{N}$
Probabilita' frequentista	$P(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_a}{N}$
Probabilita' dell'unione	$P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)$
Probabilita' dell'unione (eventi qualsiasi)	$P(a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n) = \sum_{i=1}^n P(a_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(a_{i_1} \cap a_{i_2}) \dots$ $+ (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(a_{i_1} \cap a_{i_2} \cap \dots \cap a_{i_r}) + \dots$ $+ (-1)^{n+1} P(a_1 \cap a_2 \cap \dots \cap a_n)$
Probabilita' condizionata	$P(a b) = \frac{P(a \cap b)}{P(b)}$
Probabilita' composta	$P(a \cap b) = P(a)P(b a) = P(b)P(a b)$
Teorema di Bayes	$P(a b) = \frac{P(b a)P(a)}{P(b)}$
Probabilita' totali	$P(a) = \sum_i P(a E_i)P(E_i)$
Densita' di probabilita' p_x	$P(a_1 < x \leq a_2) = \int_{a_1}^{a_2} p_x(a) da$
Densita' di probabilita' congiunta	$p_{xy}(a, b) = \frac{P(a \leq x \leq a + da, b \leq y \leq b + dB)}{da \cdot dB}$
Legame tra ddp congiunta e condizionata	$p_{xy}(a, b) = p_{y/x=a}(b) \cdot p_x(a)$
Funzione di distribuzione	$F_x(a) = P(x \leq a)$
Densita' di probabilita'	$\lim_{da \rightarrow 0} p_x(a) = \frac{P(a < x < a + da)}{da}$
Densita' di probabilita' congiunta (2 var.)	$p_{xy}(a, b) = \frac{P(a < x < a + da, b < y < b + dB)}{da \cdot dB}$
Distribuzioni marginali a partire dalla densita' congiunta	$p_x(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(a, b) dB$ $p_y(b) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(a, b) da$
Funzione di distribuzione, valori agli estremi	$F_x(-\infty) = 0$ $F_x(+\infty) = 1$
Non negativita' della densita' di probabilita'	$p_x(a) \geq 0$
Integrale unitario	$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(a) = 1$
Relazione tra FDD e DDP	$p_x(a) = \frac{dF_x(a)}{da}$
Indipendenza nella probabilita' congiunta	$p_{xy}(a, b) = p_y(b) p_x(a)$

Per un ripasso delle formule di probabilita' si veda anche:
<http://home.deib.polimi.it/prati/PwPoint/ProbabilityBasics.pdf>